

Τ.Ε.Ι. Πειραιά
**Π.Μ.Σ. ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ
ΜΕ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

Ακαδημαϊκό Έτος: 2013-2014 (Χειμερινό Εξάμηνο)

Μάθημα: Σχεδιασμός Αλγορίθμων και Επιχειρησιακή Έρευνα
Καθηγητής: Νίκος Τσότσολας

Εργασία : Προστασία Περιβάλλοντος, θέμα 5

**Αυγουστίνου Σοφία (Α.Μ. : ΕΑΠΣ 1301)
Ευστράτιος Χουρδάκης (Α.Μ.: ΕΑΠΣ 1317)**

Περιεχόμενα

1.1. Ορισμός των Μεταβλητών Απόφασης.....	3
1.2. Πίνακας απαιτούμενων αναλογιών	3
1.3. Γραφική απεικόνιση της χημικής διεργασίας	4
2. Διαμόρφωση μοντέλου γ.π. μεγιστοποίησης κέρδους.....	5
3. Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης με Simplex	5
4. Επίλυση του προβλήματος με χρήση Η/Υ. Ανάπτυξη λύσης σε δύο Πίνακες	9
5. Εξέταση βέλτιστης λύσης μετά από αύξηση των πρώτων υλών.	10
6. Αύξηση της τιμής πώλησης των δευτερεύοντος προϊόντος Z.	12

1.1. Ορισμός των Μεταβλητών Απόφασης

Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης ως ακολούθως:

X_K : Τα λίτρα του παραγόμενου προϊόντος X , του άχρηστου υποπροϊόντος M και του άχρηστου υγρού Λ , από τη βασική χημική διεργασία.

X_{AK} : Τα λίτρα της πρώτης ύλης A που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή X_K λίτρων κύριου προϊόντος (X), X_K λίτρων άχρηστου υποπροϊόντος (M) και X_K λίτρων άχρηστου υγρού (Λ).

X_{AD} : Τα λίτρα της πρώτης ύλης A που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του δευτερεύοντος προϊόντος Δ .

X_{BK} : Τα λίτρα της πρώτης ύλης B που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή X_K λίτρων κύριου προϊόντος (X), X_K λίτρων άχρηστου υποπροϊόντος (M) και X_K λίτρων άχρηστου υγρού (Λ).

X_{BE} : Τα λίτρα της πρώτης ύλης B που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του δευτερεύοντος προϊόντος E .

X_{GK} : Τα λίτρα της πρώτης ύλης G που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή X_K λίτρων κύριου προϊόντος (X), X_K λίτρων άχρηστου υποπροϊόντος (M) και X_K λίτρων άχρηστου υγρού (Λ).

X_{GZ} : Τα λίτρα της πρώτης ύλης G που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή του δευτερεύοντος προϊόντος Z .

1.2. Πίνακας απαιτούμενων αναλογιών

Για την κατασκευή του Πίνακα των απαιτούμενων αναλογιών των συστατικών ανά λίτρο προϊόντος, λαμβάνουμε υπόψη τα εξής:

Μέρος της συνολικής διαθέσιμης ποσότητας της πρώτης ύλης A (έστω, X_{AK}) θα χρησιμοποιηθεί, μαζί με τις ευθέως ανάλογες ποσότητες της πρώτης ύλης B (έστω, X_{BK}) και της πρώτης ύλης G (έστω X_{GK}), στη βασική χημική διεργασία για την παραγωγή X_K λίτρων του κάθε προϊόντος X , M και Λ . ΣΥΝΕΠΩΣ: $X_{AK}=X_{BK}=X_{GK}=X_K$ (1)

Το υπόλοιπο μέρος από τις διαθέσιμες ποσότητες των πρώτων υλών A , B , G (έστω X_{AD} , X_{BE} , X_{GZ} , αντίστοιχα) μαζί με το αναγκαίο μέρος του άχρηστου υγρού Λ μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις δευτερεύουσες χημικές διεργασίες για την παραγωγή των δευτερευόντων προϊόντων Δ , E και Z ¹.

ΣΥΝΕΠΩΣ:

Το σύνολο της διαθέσιμης ποσότητας (σε λίτρα) της πρώτης ύλης A είναι:

$$X_{AK} + X_{AD} \text{ ή, ομοίως, λόγω της (1) είναι: } X_K + X_{AD}$$

Το σύνολο της διαθέσιμης ποσότητας (σε λίτρα) της πρώτης ύλης B είναι:

$$X_{BK} + X_{BE} \text{ ή, ομοίως, λόγω της (1) είναι: } X_K + X_{BE}$$

Το σύνολο της διαθέσιμης ποσότητας (σε λίτρα) της πρώτης ύλης G είναι:

$$X_{GK} + X_{GZ} \text{ ή, ομοίως, λόγω της (1) είναι: } X_K + X_{GZ}$$

Το δευτερεύον προϊόν Δ παράγεται εφόσον προσθέσουμε στα X_{AD} λίτρα της πρώτης ύλης A την αντίστοιχη ποσότητα (X_{AD}) από το άχρηστο υγρό Λ (το οποίο έχει παραχθεί σε ποσότητα X_K κατά τη βασική χημική διεργασία). Δηλ. $X_{AD} + X_{AD} = 2 X_{AD} (= \Delta$, γιατί αυτή είναι η συνθήκη σύστασης του προϊόντος Δ)

Ομοίως, το δευτερεύον προϊόν E παράγεται εφόσον προσθέσουμε στα X_{BE} της πρώτης ύλης B την αντίστοιχη ποσότητας (X_{BE}) του άχρηστου υγρού Λ (το οποίο έχει παραχθεί σε

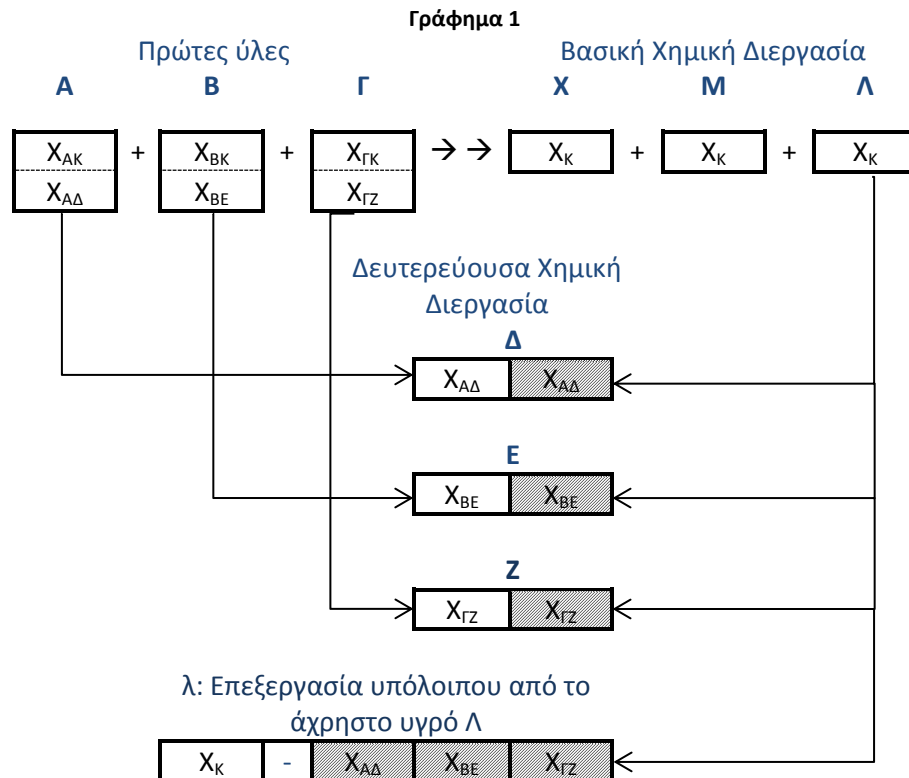
¹ Το μέρος του άχρηστου υγρού Λ που δεν θα χρησιμοποιηθεί για την παρασκευή των δευτερευόντων προϊόντων θα υποστεί την ειδική επεξεργασία. Αν το μέρος αυτό το ονομάσουμε λ , τότε: $\lambda = X_K - X_{AD} - X_{BE} - X_{GZ}$

ποσότητα X_K κατά τη βασική χημική διεργασία). Δηλ. $X_{BE} + X_{BE} = 2 X_{BE}$ (=E, γιατί αυτή είναι η συνθήκη σύστασης του προϊόντος E), και το δευτερεύον προϊόν Z παράγεται εφόσον προσθέσουμε στα $X_{ΓZ}$ της πρώτης ύλης Γ' την αντίστοιχη ποσότητα ($X_{ΓZ}$) του άχρηστου υγρού Λ (το οποίο έχει παραχθεί σε ποσότητα X_K κατά τη βασική χημική διεργασία). Δηλ. $X_{ΓZ} + X_{ΓZ} = 2 X_{ΓZ}$ (=Z, γιατί αυτή είναι η συνθήκη σύστασης του προϊόντος Z).

Πίνακας 1 –Απαιτούμενες αναλογίες συστατικών ανά λίτρο προϊόντος

			Βασική Χημική Διεργασία			Δευτερεύουσα Χημική Διεργασία		
			X	M	Λ	Δ	E	Z
Πρώτες ύλες								
A:	X_{AK}	1 lt						
B:	X_{BK}	1 lt						
Γ:	$X_{ΓK}$	1 lt						
			1	1	1			
A:	$X_{AΔ}$	lt				1/2		
B:	X_{BE}	lt					1/2	
Γ:	$X_{ΓZ}$	lt						1/2
Λ:	X_K	lt				1/2	1/2	
	$X_{AΔ}$							
	X_{BE}							
	$X_{ΓZ}$					1/2		

1.3. Γραφική απεικόνιση της χημικής διεργασίας



2. Διαμόρφωση μοντέλου γ.π. μεγιστοποίησης κέρδους.

Το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης από τη διάθεση των προϊόντων είναι το εξής:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$(\max) G_1 = 600 X - 30 \Delta + 40 E + 10 Z - 75 \lambda \Rightarrow$$

$$(\max) G_1 = 600 X_K - 30(2X_{A\Delta}) + 40(2X_{BE}) + 10(2X_{\Gamma Z}) - 75[X_K - (X_{A\Delta} + X_{BE} + X_{\Gamma Z})] \Rightarrow$$

$$(\max) G_1 = 525 X_K + 15 X_{A\Delta} + 155 X_{BE} + 95 X_{\Gamma Z}$$

Περιορισμοί :

- $X_K + X_{A\Delta} \leq 7000$ Περιορισμός διαθεσιμότητας πρώτης ύλης A
- $X_K + X_{BE} \leq 6000$ Περιορισμός διαθεσιμότητας πρώτης ύλης B
- $X_K + X_{\Gamma Z} \leq 9000$ Περιορισμός διαθεσιμότητας πρώτης ύλης Γ
- $2X_{BE} + 2X_{\Gamma Z} \geq 6000$ Συμφωνία της εταιρείας με τοπική παραγωγική μονάδα για διάθεση τουλάχιστον 6000 lt E και Z
- $X_K - X_{A\Delta} - X_{BE} - X_{\Gamma Z} \geq 0$ Η ποσότητα του άχρηστου υγρού Λ (X_K) πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του αθροίσματος των μερών της που χρησιμοποιείται στις δευτερεύουσες χημικές διεργασίες. Σημειώνεται ότι αν ο περιορισμός αυτός δεν ισχύει, τότε δεν υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής κάποιων εκ των δευτερευόντων προϊόντων.

$$\text{και } X_K, X_{A\Delta}, X_{BE}, X_{\Gamma Z} \geq 0$$

3. Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης με Simplex

$$G_1 = 525 X_K + 15 X_{A\Delta} + 155 X_{BE} + 95 X_{\Gamma Z} + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - 0S_4 - MT_1 - 0S_5$$

Μετατρέπουμε τις ανισότητες των περιορισμών μας σε ισότητες, προσθέτοντας τις αναγκαίες τεχνητές μεταβλητές, προκειμένου να δημιουργήσουμε τον μοναδιαίο πίνακα.

Περιορισμοί:

- $X_K + X_{A\Delta} \leq 7000 \Rightarrow X_K + X_{A\Delta} + S_1 = 7000$
- $X_K + X_{BE} \leq 6000 \Rightarrow X_K + X_{BE} + S_2 = 6000$
- $X_K + X_{\Gamma Z} \leq 9000 \Rightarrow X_K + X_{\Gamma Z} + S_3 = 9000$
- $2X_{BE} + 2X_{\Gamma Z} \geq 6000 \Rightarrow 2X_{BE} + 2X_{\Gamma Z} - S_4 + T_1 = 6000$
- $X_{A\Delta} + X_{BE} + X_{\Gamma Z} - X_K \leq 0^2 \Rightarrow X_K - X_{A\Delta} - X_{BE} - X_{\Gamma Z} + S_5 = 0$

$$\text{και οι φυσικοί περιορισμοί: } X_K, X_{A\Delta}, X_{BE}, X_{\Gamma Z} \geq 0$$

Η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$(\max) G_1 = 525 X_K + 15 X_{A\Delta} + 155 X_{BE} + 95 X_{\Gamma Z} + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - 0S_4 - MT_1 - 0S_5$$

² Αναδιατάξαμε την ανίσωση προκειμένου να αποφύγουμε τη χρήση και δεύτερης τεχνητής μεταβλητής.

Διαμορφώνουμε τον Πίνακα για να εφαρμόσουμε την μέθοδο Simplex. Οι σκιασμένες στήλες σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα 5 X 5.

Ci		525	15	155	95	0	0	0	0	-M	0	
		X _K	X _{ΑΔ}	X _{ΒΕ}	X _{ΓΖ}	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	T ₄	S ₅	X _b
0	S ₁	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	7000
0	S ₂	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	6000
0	S ₃	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	9000
-M	T ₄	0	0	2	2	0	0	0	-1	1	0	6000
0	S ₅	-1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0

Επίλυση:

Ci		525	15	155	95	0	0	0	0	-M	0	
		X _K	X _{ΑΔ}	X _{ΒΕ}	X _{ΓΖ}	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	T ₄	S ₅	X _b
0	S ₁	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	7000
0	S ₂	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	6000
0	S ₃	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	9000
-M	T ₄	0	0	2	2	0	0	0	-1	1	0	6000
0	S ₅	-1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
	Z _i	0,0E+00	0,0E+00	2,0E+06	2,0E+06	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	1,0E+06	1,0E+06	0,0E+00	6,0E+09
	Ci - Zi	5,3E+02	1,5E+01	2,0E+06	2,0E+06	0,0E+00	0,0E+00	0,0E+00	1,0E+06	0,0E+00	0,0E+00	
		---	---	max	---	---	---	---	---	---	---	

Η μέθοδος βγάζει από τη Βάση την τεχνητή μεταβλητή T₄. Στην επανάληψη θα αφαιρέσουμε και την σχετική στήλη.

1^η Επανάληψη³:

Ci		525	15	155	95	0	0	0	0	0	
		X _K	X _{ΑΔ}	X _{ΒΕ}	X _{ΓΖ}	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	X _b
0	S ₁	1	1	0	0	1	0	0	0	0	7000
0	S ₂	1	0	0	-1	0	1	0	0,5	0	3000
0	S ₃	1	0	0	1	0	0	1	0	0	9000
155	X _{ΒΕ}	0	0	1	1	0	0	0	-0,5	0	3000
0	S ₅	-1	1	0	0	0	0	0	0,5	1	-3000
	Z _i	0	0	155	155	0	0	0	-77,5	0	465000
	Ci - Zi	525	15	0	-60	0	0	0	77,5	0	
		max	---	---	---	---	---	---	---	---	

³ Με κόκκινο σημειώνεται η κάθε φορά Νέα Οδηγός Γραμμή

2^η Επανάληψη:

Ci		525	15	155	95	0	0	0	0	0	
		X _K	X _{ΑΔ}	X _{ΒΕ}	X _{ΓΖ}	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	X _b
0	S ₁	0	1	0	1	1	-1	0	-0,5	0	4000
525	X _K	1	0	0	-1	0	1	0	0,5	0	3000
0	S ₃	0	0	0	2	0	-1	1	-0,5	0	6000
155	X _{ΒΕ}	0	0	1	1	0	0	0	-0,5	0	3000
0	S ₅	0	1	0	-1	0	1	0	1	1	0
	Z _i	525	0	155	-370	0	525	0	185	0	2040000
	Ci - Zi	0	15	0	465	0	-525	0	-185	0	
		---	---	---	max	---	---	---	---	---	

3^η Επανάληψη:

Ci		525	15	155	95	0	0	0	0	0	
		X _K	X _{ΑΔ}	X _{ΒΕ}	X _{ΓΖ}	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	X _b
0	S ₁	0	1	0	0	1	-0,5	-0,5	-0,25	0	1000
525	X _K	1	0	0	0	0	0,5	0,5	0,25	0	6000
95	X _{ΓΖ}	0	0	0	1	0	-0,5	0,5	-0,25	0	3000
155	X _{ΒΕ}	0	0	1	0	0	0,5	-0,5	-0,25	0	0
0	S ₅	0	1	0	0	0	0,5	0,5	0,75	1	3000
	Z _i	525	0	155	95	0	292,5	232,5	68,75	0	3435000
	Ci - Zi	0	15	0	0	0	-292,5	-232,5	-68,75	0	
		---	max	---	---	---	---	---	---	---	

4^η Επανάληψη:

Ci		525	15	155	95	0	0	0	0	0	
		X _K	X _{ΑΔ}	X _{ΒΕ}	X _{ΓΖ}	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	X _b
15	X _{ΑΔ}	0	1	0	0	1	-0,5	-0,5	-0,25	0	1000
525	X _K	1	0	0	0	0	0,5	0,5	0,25	0	6000
95	X _{ΓΖ}	0	0	0	1	0	-0,5	0,5	-0,25	0	3000
155	X _{ΒΕ}	0	0	1	0	0	0,5	-0,5	-0,25	0	0
0	S ₅	0	0	0	0	-1	1	1	1	1	2000
	Z _i	525	15	155	95	15	285	225	65	0	3450000
	Ci - Zi	0	0	0	0	-15	-285	-225	-65	0	
		---	---	---	---	---	---	---	---	---	

Επειδή όλα τα στοιχεία της γραμμής Ci - Zi είναι είτε αρνητικά είτε μηδέν, η βέλτιστη λύση είναι:

G₁*=3.450.000 χ.μ. και οι τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι:

X_K=6000 lt, X_{ΑΔ}= 1000 lt, X_{ΒΕ}= 0 lt, X_{ΓΖ}= 3000 lt

Οι τιμές των τεχνητών μεταβλητών, επειδή δεν είναι στη Βάση, είναι μηδέν. Δηλ. S₁=0, S₂=0

, $S_3=0$, $S_4=0$. Έτσι, από τους αντίστοιχους περιορισμούς που αυτές είχαν χρησιμοποιηθεί, συνάγεται ότι οι πρώτες ύλες εξαντλούνται στο σύνολό τους (αφού $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$) και ότι η αθροιστική παραγόμενη ποσότητα των E και Δ δευτερευόντων προϊόντων διατίθενται στο κάτω όριο της σχετικής συμφωνίας με την τοπική παραγωγική μονάδα (αφού $S_4=0 \Rightarrow E+Z=6000$ lt).

Η $S_5 = 2000$ lt σημαίνει ότι στη βέλτιστη λύση, από τα 6000 lt της παραγόμενης ποσότητας του άχρηστου υγρού Λ, τα 4000 lt θα χρησιμοποιηθούν για την παρασκευή των δευτερευόντων προϊόντων ενώ τα 2000 lt θα αποτελέσουν την ποσότητα λ που θα υποστεί ειδική επεξεργασία και θα διοχετευτεί στο ποτάμι.

Η σύνθεση της παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης, με τους υφιστάμενους περιορισμούς, έχει ως εξής:

Παραγωγή κύριου προϊόντος $X=6000$ lt

Παραγωγή άχρηστου υποπροϊόντος $M=6000$ lt

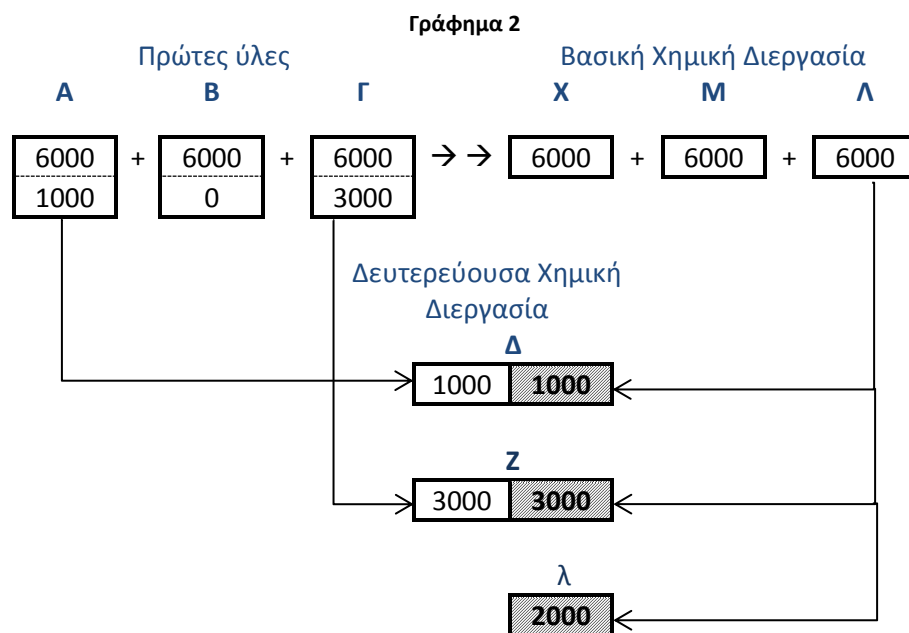
Παραγωγή δευτερεύοντος προϊόντος $\Delta=2000$ lt

Παραγωγή δευτερεύοντος προϊόντος $Z= 6000$ lt

Ειδική επεξεργασία άχρηστου υγρού για διοχέτευση στο ποτάμι $\lambda=2000$ lt.

Ενώ στη βέλτιστη λύση δεν παράγεται Δευτερεύον προϊόν E.

Η γραφική απεικόνιση της παραγωγικής σύνθεσης που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης έχει ως εξής:



4. Επίλυση του προβλήματος με χρήση Η/Υ. Ανάπτυξη λύσης σε δύο Πίνακες

1^{ος} Πίνακας:

		Κύριο Προϊόν	
1ο Στάδιο	Ci	525	
		Xκ	
	It	6000	
	A	1	
	B	1	
	Γ	1	

G1 (max)

3450000

2^{ος} Πίνακας:

		Δευτερεύον Προϊόν		Δευτερεύον Προϊόν		Δευτερεύον Προϊόν	
2ο Στάδιο	Ci	15	155	95			
		XΑΔ	XΒΕ	XΓΖ			
	It	1000	0	3000			
	A	1					
	B		1				
	Γ			1			
	Λ	1	1	1			

Περιορισμοί

A	7000	<=	7000
B	6000	<=	6000
Γ	9000	<=	9000
λ	2000	>=	0
E+Z	6000	>=	6000

Από την «αναφορά απαντήσεων» του Solver του excel λαμβάνουμε τα όρια στα οποία μπορεί να μεταβληθεί ένας (κάθε φορά) από τους συντελεστές της αντικειμενικής χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση, υπό την προϋπόθεση ότι οι υπόλοιποι συντελεστές παραμένουν σταθεροί.

Πίνακας 2

Όνομα	Τελικό Τιμή	Μειωμένο Κόστος	Στόχος Συντελεστής	Επιτρεπτό Αύξηση	Επιτρεπτό Μείωση
G1 (max) Xκ	6000	0	525	1E+30	260
G1 (max) XΑΔ	1000	0	15	260	15
G1 (max) XΒΕ	0	0	155	260	570
G1 (max) XΓΖ	3000	0	95	260	450

Επίσης, από το Solver λαμβάνουμε και τις σκιώδεις τιμές των πρώτων υλών (Α,Β και Γ) και

την πραγματική αξία σε χ.μ. της συμφωνίας που έχει κάνει η εταιρεία με την τοπική παραγωγική μονάδα για τη διάθεση των δευτερευόντων προϊόντων E και Z. Οι σκιάδες τιμές δείχνουν το ποσό κατά το οποίο αλλάζει η αντικειμενική συνάρτηση, δεδομένης μιας μοναδιαίας μεταβολής της τιμής της αντίστοιχης δεξιάς σταθερά (δηλ. του αντίστοιχου περιορισμού), θεωρώντας ότι οι άλλες δεξιές σταθερές (δηλ. οι άλλοι περιορισμοί) δεν μεταβάλλονται.

Πίνακας 3

Όνομα	Τελικό Τιμή	Σκιά Τιμή	Περιορισμός Δεξιά πλευρά	Επιτρεπτό Αύξηση	Επιτρεπτό Μείωση
A	7000	15	7000	2000	1000
B	6000	285	6000	2000	0
Γ	9000	225	9000	0	2000
E+Z	6000	-65	6000	2000	0
λ	-2000	0	0	1E+30	2000

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι αν η εταιρεία διαθέτει περισσότερα από 6000 lt του δευτερεύοντος προϊόντος Z στην τοπική παραγωγική μονάδα με την οποία έχει κάνει την σχετική συμφωνία, θα μειώνει το κέρδος της γραμμικά κατά 65 χ.μ. για κάθε επιπλέον λίτρο (πάνω από τα 6000 lt).

Στο διάστημα διαθεσιμότητας [6000, 8000]lt, η πρώτη ύλη B' είναι αυτή που μπορεί να αυξήσει περισσότερο το κέρδος της επιχείρησης σε σύγκριση με αντίστοιχες αυξήσεις στη διαθεσιμότητα των άλλων δύο πρώτων υλών. Ομοίως, στο ίδιο διάστημα διαθεσιμότητας, η επιχείρηση έχει μια σαφή εικόνα για το πόσο όφελος σε χ.μ. της προσφέρει κάθε επιπλέον διαθέσιμο λίτρο της πρώτης ύλης B'.

5. Εξέταση βέλτιστης λύσης μετά από αύξηση των πρώτων υλών.

Αυξάνοντας τις πρώτες ύλες A,B και Γ σε 9.000lt, 7.000lt και 11.000lt αντίστοιχα, το κέρδος αυξάνεται στις 4.085.000 χ.μ. ενώ εξαντλούνται στο σύνολό τους οι νέες διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών:

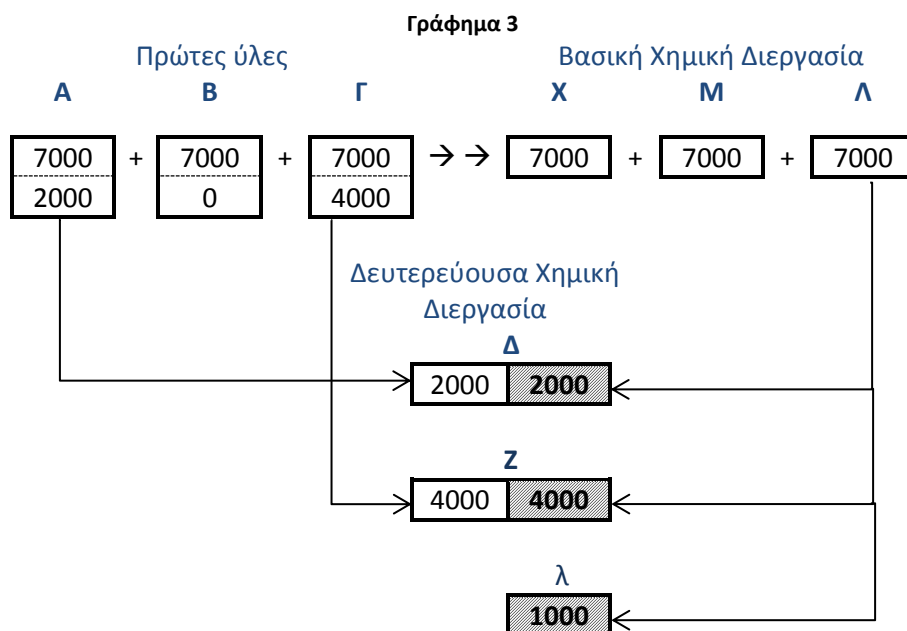
Ci	525	15	155	95		
	ΧΚ	ΧΑΔ	ΧΒΕ	ΧΓΖ		
A	1	1			9000	<= 9000
B	1		1		7000	<= 7000
Γ	1			1	11000	<= 11000
E+Z			2	2	8000	>= 6000
λ	-1	1	1	1	-1000	<= 0
Gz (max)	7000	2000	0	4000	4085000	

Η σύνθεση της παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης, με τους υφιστάμενους νέους περιορισμούς, έχει ως εξής:

Παραγωγή κύριου προϊόντος **X=7000 lt**

Παραγωγή άχρηστου υποπροϊόντος $M=7000 \text{ lt}$
 Παραγωγή δευτερεύοντος προϊόντος $\Delta=4000 \text{ lt}$
 Παραγωγή δευτερεύοντος προϊόντος $Z= 8000 \text{ lt}$
 Ειδική επεξεργασία άχρηστου υγρού για διοχέτευση στο ποτάμι $\lambda=1000 \text{ lt}$.
 Ενώ και στη νέα βέλτιστη λύση δεν παράγεται δευτερεύον προϊόν E.

Η γραφική απεικόνιση της παραγωγικής σύνθεσης που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης με τις αυξημένες ποσότητες πρώτων υλών [$G_2(\max)$], έχει ως εξής:



Από τον κατωτέρω πίνακα (Πίνακας 4) διαπιστώνεται ότι για να γίνει ανταγωνιστικό και να αρχίσει να παράγεται το προϊόν E, θα πρέπει η τιμή του συντελεστή X_{BE} στην αντικειμενική συνάρτηση να ξεπεράσει τις 415 χ.μ ανά λίτρο. Έτσι στο διάστημα $[-\infty, 415]$, χωρίς άλλες μεταβολές στους συντελεστές των λοιπών μεταβλητών απόφασης, η παραγωγή του προϊόντος E δεν συνεισφέρει στην αύξηση του κέρδους της επιχείρησης.

Πίνακας 4

Όνομα	Τελικό Τιμή	Μειωμένο Κόστος	Στόχος Συντελεστής	Επιτρεπτό Αύξηση	Επιτρεπτό Μείωση
G2 (max) XK	7000	0	525	1E+30	260
G2 (max) XAΔ	2000	0	15	260	15
G2 (max) XBE	0	-260	155	260	1E+30
G2 (max) XΓZ	4000	0	95	260	95

Από την ανάλυση ευαισθησίας (Πίνακας 5) διαπιστώνεται ότι με την αύξηση των διαθέσιμων ποσοτήτων στις πρώτες ύλες $G_2(\max)$ βελτιώνεται η ευελιξία της επιχείρησης στη διατήρηση της συγκεκριμένης διάρθρωσης της παραγωγής της, ακόμα και μετά από μικρές μεταβολές στις διαθεσιμότητες των πρώτων υλών.

Πίνακας 5

G2 (max)	Όνομα	Τελικό	Σκιά	Περιορισμός	Επιτρεπτό	Επιτρεπτό
		Τιμή	Τιμή	Δεξιά πλευρά	Αύξηση	Μείωση
	A	9000	15	9000	1000	2000
	B	7000	415	7000	1000	333,3333333
	Γ	11000	95	11000	1000	1000
	E+Z	8000	0	6000	2000	1E+30
	λ	-1000	0	0	1E+30	1000

Αντίθετα, η αρχική βέλτιστη λύση **G1 (max)** είναι πολλή ευαίσθητη ακόμα και στις οριακές μεταβολές στις διαθέσιμες ποσότητες των πρώτων υλών **B** και **Γ**. Έτσι, όπως διαπιστώνεται και από τον Πίνακα 6, η βέλτιστη λύση δεν επέτρεπε καθόλου τη μείωση της διαθέσιμης ποσότητας της πρώτης ύλης B, ενώ έστω και η οριακή αύξηση της πρώτης ύλης Γ είναι ικανή να αλλάξει τη διάρθρωση της παραγωγής.

Πίνακας 6

G1 (max)	Όνομα	Τελικό	Σκιά	Περιορισμός	Επιτρεπτό	Επιτρεπτό
		Τιμή	Τιμή	Δεξιά πλευρά	Αύξηση	Μείωση
	A	7000	15	7000	2000	1000
	B	6000	285	6000	2000	0
	Γ	9000	225	9000	0	2000
	E+Z	6000	-65	6000	2000	0
	λ	-2000	0	0	1E+30	2000

6. Αύξηση της τιμής πώλησης των δευτερεύοντος προϊόντος Z.

Η αύξηση της τιμής πώλησης του δευτερεύοντος προϊόντος Z στις 22 χ.μ. και με την παράλληλη αύξηση των ποσοτήτων των πρώτων υλών, το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού διαμορφώνεται ως εξής:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$(max) G_1 = 600 X - 30 \Delta + 40 E + 22 Z - 75 \lambda \Rightarrow$$

$$(max) G_1 = 600 X_K - 30(2X_{AD}) + 40(2X_{BE}) + 22(2X_{ΓZ}) - 75[X_K - (X_{AD} + X_{BE} + X_{ΓZ})] \Rightarrow$$

$$(max) G_1 = 525 X_K + 15 X_{AD} + 155 X_{BE} + 119 X_{ΓZ}$$

Περιορισμοί:

- $X_K + X_{AD} \leq 9000$
- $X_K + X_{BE} \leq 7000$
- $X_K + X_{ΓZ} \leq 11000$
- $2X_{BE} + 2X_{ΓZ} \geq 6000$
- $X_K - X_{AD} - X_{BE} - X_{ΓZ} \geq 0$

με $X_K, X_{AD}, X_{BE}, X_{ΓZ} \geq 0$

Με τη βοήθεια του solver παίρνουμε τη νέα βέλτιστη λύση :

Ci	525	15	155	119		
	XK	XAD	XBE	XGZ		
A	1	1			9000	<= 9000
B	1		1		7000	<= 7000
Γ	1			1	11000	<= 11000
E+Z			2	2	8000	>= 6000
λ	-1	1	1	1	-1000	<= 0
G₃ (max)	7000	2000	0	4000	4181000	

Η σύνθεση της παραγωγής που μεγιστοποιεί το νέο **[G₃ (max)]**, βελτιωμένο, κέρδος της επιχείρησης, με τους υφιστάμενους περιορισμούς, έχει ως εξής:

Παραγωγή κύριου προϊόντος **X=7000 lt**

Παραγωγή άχρηστου υποπροϊόντος **M=7000 lt**

Παραγωγή δευτερεύοντος προϊόντος **Δ=4000 lt**

Παραγωγή δευτερεύοντος προϊόντος **Z= 8000 lt**

Ειδική επεξεργασία άχρηστου υγρού για διοχέτευση στο ποτάμι **λ=1000 lt**.

Ενώ και στη νέα βέλτιστη λύση δεν παράγεται δευτερεύον προϊόν **E**.

Από τα ανωτέρω συνάγεται ότι η αύξηση της τιμής πώλησης του δευτερεύοντος προϊόντος **Z** δεν επηρεάζει καθόλου τη διάρθρωση της παραγωγής της επιχείρησης, αλλά αυξάνει το βέλτιστο κέρδος της κατά **96.000 χ.μ.** ($4.181.000 - 4.085.000 = 96.000 \text{χ.μ.}$)

Από τις σκιώδεις τιμές στον Πίνακα 7, επιβεβαιώνεται ότι, σε σύγκριση με τις σκιώδεις τιμές των πρώτων υλών Β και Γ της **G₂(max)** [Πίνακας 5], αυξήθηκε η πραγματική αξία της πρώτης ύλης Γ που χρησιμοποιείται για την παραγωγή του δευτερεύοντος προϊόντος Ζ στο πρόγραμμα της παραγωγής από 95 σε 119 χ.μ. ενώ μειώθηκε εκείνη της πρώτης ύλης Β' από 415 σε 391 χ.μ.

Πίνακας 7

G₃ (max)	Τελικό	Σκιά	Περιορισμός	Επιτρεπτό	Επιτρεπτό
Όνομα	Τιμή	Τιμή	Δεξιά	Αύξηση	Μείωση
			πλευρά		
A	9000	15	9000	1000	2000
B	7000	391	7000	1000	333,3333333
Γ	11000	119	11000	1000	1000
E+Z	8000	0	6000	2000	1E+30
λ	-1000	0	0	1E+30	1000