Γραφική απεικόνιση των αποδόσεων στους κλασικούς τύπους παιγνίων.

Έχοντας προσδιορίσει τις αμιγείς στρατηγικές ισορροπίας στα μοντέλα των «κλασικών» τύπων παιγνίων και έχοντας αναφέρει τη διαδικασία εύρεσης των στρατηγικών μικτής ισορροπίας, είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε τη γραφική απεικόνιση του συνόλου των λύσεων στα παίγνια αυτά και να ελέγξουμε αν οι ισορροπίες Nash είναι και άριστες κατά Pareto.

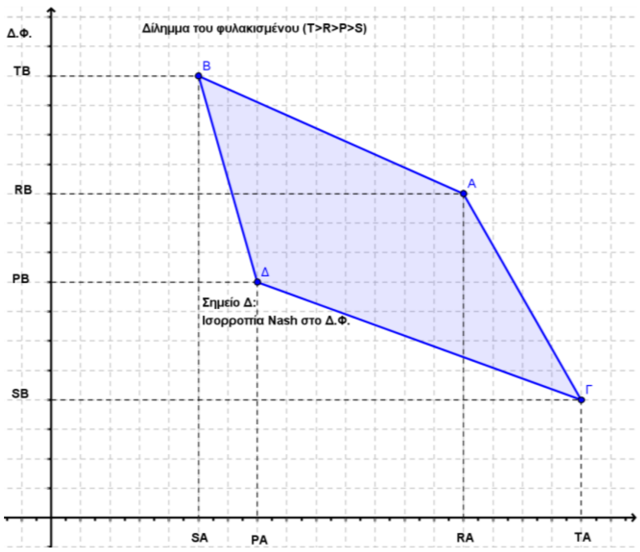
Όπως είπαμε, η **ισορροπία Nash** (σε αμιγείς ή μικτές στρατηγικές) είναι μια κατάσταση, μια πιθανή έκβαση του παιγνίου, από την οποία οι παίκτες δεν έχουν συμφέρον να απομακρυνθούν **μονομερώς** όταν είναι δεδομένο ότι οι άλλοι παίκτες θα διατηρήσουν τις στρατηγικές επιλογές που έκαναν. Αυτή η κατάσταση δεν συνεπάγεται ότι η ισορροπία Nash εγγυάται μια άριστη κατά Pareto έκβαση, δηλ. μια έκβαση από την οποία είναι αδύνατη η αύξηση της απόδοσης ενός παίκτης χωρίς τη μείωση της απόδοσης κάποιου άλλου.

1. Σύνολο λύσεων στα παίγνια τύπου «Δίλημμα των Φυλακισμένων» (Δ.Φ.)

		B	
		Συνεργασία	Παρασπονδία
A	Συνεργασία	R_A , R_B	S_A , $\boldsymbol{T_B}$
	Παρασπονδία	$\boldsymbol{T_A}$, S_B	$\boldsymbol{P_A}$, $\boldsymbol{P_B}$

Όπου, $\boldsymbol{T_i} > \boldsymbol{R_i} > \boldsymbol{P_i} > \boldsymbol{S_i}$ με $i = A, B$

Πίνακας 1 – Γενική μήτρα παιγνίων τύπου Δ.Φ.

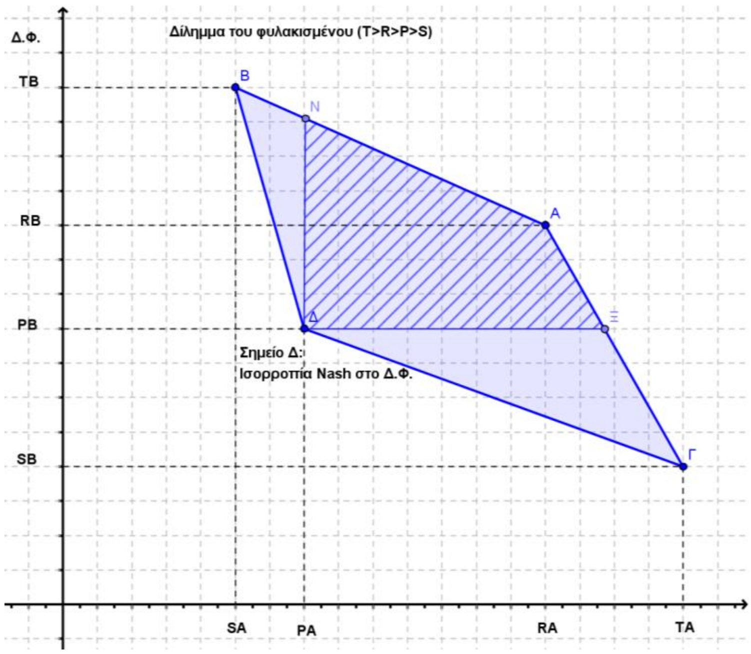


Διάγραμμα 1 – Απεικόνιση των αποδόσεων σε παίγνια τύπου Δ.Φ.

Η κυρίαρχη στρατηγική που έχουν και οι δύο παίκτες οδηγεί στο προφίλ ισορροπίας Nash, η οποία απεικονίζεται στο διάγραμμα ως σημείο Δ. Είναι φανερό ότι υπάρχει προφίλ αμιγών στρατηγικών που οδηγεί σε μια κατάσταση Pareto (σημείο Α) από την οποία δεν μπορεί να βελτιωθεί η απόδοση του ενός αν δεν μειωθεί η απόδοση του άλλου.

Σε σχέση με το σημείο ισορροπίας (Δ) υπάρχουν άλλες εκβάσεις σε μικτές στρατηγικές οι οποίες αποφέρουν μεγαλύτερη απόδοση και στους δύο παίκτες **αλλά δεν αποτελούν ευσταθείς ισορροπίες** ή αλλιώς **διατηρήσιμες εκβάσεις**.

Στο κατωτέρω διάγραμμα, το σκιασμένο τετράπλευρο ΝΑΞΔ περιέχει τα προφίλ μικτών στρατηγικών που αποφέρουν υψηλότερη απόδοση και στους δύο εμπλεκόμενους από την απόδοση που τους παρέχει το σημείο Δ.



Διάγραμμα 2

2. Σύνολο λύσεων στα παίγνια τύπου «Αδιεξόδου» (ΑΔ)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">B</td></tr>
<tr><td>Συνεργασία</td><td>Παρασπονδία</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>Συνεργασία</td><td>R_A , R_B</td><td>S_A , $\boldsymbol{T_B}$</td></tr>
<tr><td>Παρασπονδία</td><td>$\boldsymbol{T_A}$, S_B</td><td>$\boldsymbol{P_A}$, $\boldsymbol{P_B}$</td></tr>
</table>

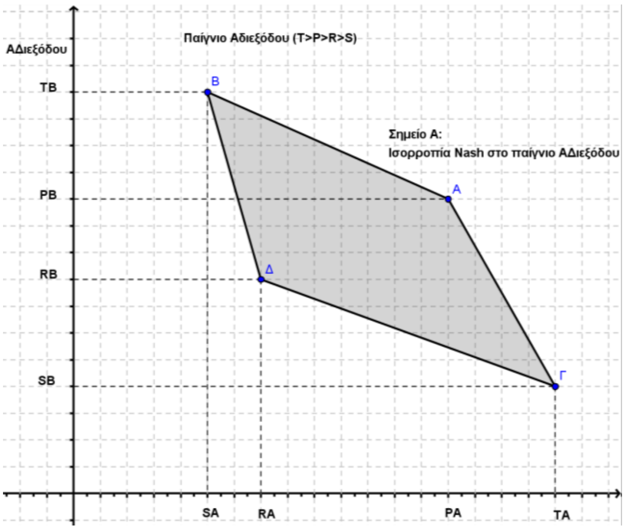
Όπου, $\boldsymbol{T_i} > \boldsymbol{P_i} > \boldsymbol{R_i} > \boldsymbol{S_i}$ με $i = A, B$

Πίνακας 2 – Μήτρα αποδόσεων σε παίγνια τύπου ΑΔ

Ο κάθε παίκτης, όπως και στο τύπου Δ.Φ., έχει κυρίαρχη στρατηγική (τη στρατηγική της «παρασπονδίας»), αλλά, πλέον[1], το προφίλ των κυρίαρχων στρατηγικών των δύο παικτών (παρασπονδία, παρασπονδία) οδηγεί σε έκβαση που είναι **αμοιβαία** προτιμότερη από το διάνυσμα που θα κατέληγαν σε περίπτωση που και οι δύο εμπλεκόμενοι συνεργάζονταν.

Η ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές αποτελεί και βέλτιστη κατά Pareto έκβαση.

[1] Στο παίγνιο τύπου Δ.Φ. η κατάταξη των προτιμήσεων είναι: $T_i > \boldsymbol{R_i} > \boldsymbol{P_i} > S_i$, ενώ στο παίγνιο Αδιεξόδου η κατάταξη των προτιμήσεων είναι: $T_i > \boldsymbol{P_i} > \boldsymbol{R_i} > S_i$



Διάγραμμα 3

3. Σύνολο λύσεων στα παίγνια τύπου Battle of Sexes.

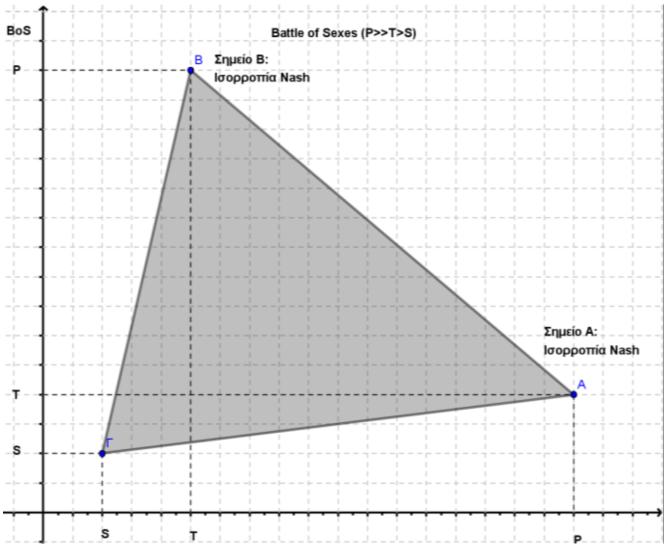
Στα εν λόγω τύπου παίγνια, κάθε παίκτης έχει μια ισχυρή προτίμηση προς μια έκβαση, αλλά η προτίμησή του αυτή δεν είναι ικανή να αποτελέσει κυρίαρχη στρατηγική. Συνεπώς κανείς παίκτης δεν έχει κυρίαρχη αμιγή στρατηγική.

		B	
		Προτίμηση Α	Προτίμηση Γ
A	Προτίμηση Α	$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}$	S, S
	Προτίμηση Γ	S, S	$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P \gg T > S}$$

Πίνακας 3 – Μήτρα αποδόσεων σε παίγνια τύπου B.S.

Τα παίγνια του τύπου αυτού έχουν δύο σημεία ισορροπίας. Το σημείο ισορροπίας Α αποτελεί προτιμητέα ισορροπία για τον παίκτη Α και το σημείο ισορροπίας Β προτιμητέα για τον παίκτη Β. **Καθένα από τα σημεία ισορροπίας είναι και βέλτιστα κατά Pareto.**



Διάγραμμα 4

4. Σύνολο λύσεων στα παίγνια τύπου Chicken Game

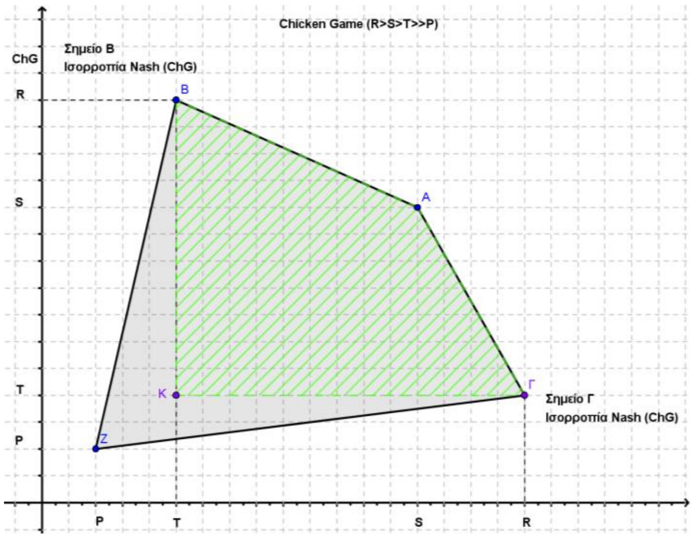
Το **παίγνιο του δειλού** είναι ένα υπόδειγμα καταστάσεων ισχυρού ανταγωνισμού στο οποίο ο ένας παίκτης επιθυμεί να αποφύγει την υποταγή του στον άλλον. Στην περίπτωση που κανένας δεν υποχωρήσει τότε και οι δύο οδηγούνται στη χειρότερη δυνατή έκβαση.

		B	
		Επιβολή	Υποταγή
A	Επιβολή	P, P	$\boldsymbol{R, T}$
	Υποταγή	$\boldsymbol{T, R}$	S, S

με $\boldsymbol{R > S > T \gg P}$

Πίνακας 4 – Μήτρα παιγνίων τύπου chicken game

Στα παίγνια αυτού του τύπου υπάρχουν δύο προφίλ ισορροπίας Nash, το ένα ευνοεί τον ένα παίκτη και το άλλο τον άλλον. Το σημείο Γ στο γράφημα απεικονίζει τις αποδόσεις στο προφίλ ισορροπίας που ευνοεί τον παίκτη Α και το σημείο Β ευνοεί τον παίκτη Β. **Και τα δύο προφίλ ισορροπίας είναι βέλτιστα κατά Pareto.**



Διάγραμμα 5

Το γραμμοσκιασμένο τετράπλευρο ΒΑΓΚ δείχνει τα προφίλ τα οποία αντιπροσωπεύουν καλύτερες εκβάσεις για τον παίκτη που βρίσκεται στη μη-προτιμητέα γι' αυτόν ισορροπία.

Έτσι, όταν η έκβαση του παιγνίου είναι στο σημείο Γ κάθε άλλη έκβαση (που όμως δεν προέρχεται από μονομερείς ενέργειες) με αποδόσεις εντός του γραμμοσκιασμένου τετραπλεύρου αποφέρει υψηλότερη απόδοση στον παίκτη Β, αλλά μειώνει την απόδοση του παίκτη Α. Η εν λόγω παρατήρηση έχει αξία για τις περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων παιγνίων αυτού του τύπου.

5. Σύνολο λύσεων στα παίγνια τύπου Assurance game

Όπως έχει αναφερθεί, στα παίγνια αυτού του τύπου οι παίκτες καλούνται να επιλέξουν μεταξύ ενός βέβαιου προσωπικού οφέλους (προσωπική ασφάλεια) και ενός υπέρτερου σε μέγεθος προσωπικού οφέλους που, όμως, η επίτευξή του προϋποθέτει τη συνεργασία και των δύο εμπλεκομένων.

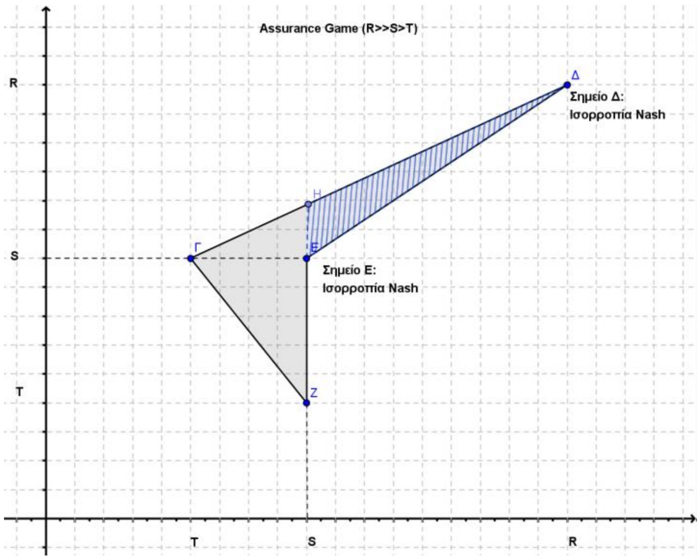
		B	
		Ομαδικά	Ατομικά
A	Ομαδικά	$\boldsymbol{R, R}$	T, S
	Ατομικά	S, T	$\boldsymbol{S, S}$

με $\boldsymbol{R \gg S > T}$

Πίνακας 5 – Μήτρα αποδόσεων παιγνίου τύπου Assurance

Οι παίκτες δεν διαθέτουν κυρίαρχη στρατηγική, και το παίγνιο έχει δύο ισορροπίες Nash. Στο ένα προφίλ ισορροπίας το οποίο δεν αποτελεί βέλτιστη κατά Pareto έκβαση, οι παίκτες λαμβάνουν τις αποδόσεις ασφαλείας. Στο άλλο προφίλ οι παίκτες επιτυγχάνουν ισορροπία Nash η οποία αποτελεί και βέλτιστη κατά Pareto έκβαση.

Το σημείο Δ αποτελεί ισορροπία Nash και η έκβαση αυτή είναι βέλτιστη κατά Pareto. Αντίθετα, το σημείο Ε που αποτελεί κι αυτό ισορροπία Nash δεν είναι βέλτιστη έκβαση σε όρους Pareto καθώς οποιοδήποτε προφίλ μικτών στρατηγικών που αποφέρει αποδόσεις στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο ΔΗΕ παρέχει και στους δύο εμπλεκόμενους υψηλότερες απολαβές.



Διάγραμμα 6

6. Βελτιστοποίηση κατά Pareto.

Όπως έχει αναφερθεί, η απόδοση που λαμβάνει ένας παίκτης σε κάθε ενδεχόμενη έκβαση ενός παιγνίου σχετίζεται με την προσκτηθείσα χρησιμότητα (ομοίως, ωφέλεια ή ικανοποίηση) που προσλαμβάνει από τη συγκεκριμένη κάθε φορά έκβαση.

Ο κάθε παίκτης, όπως έχουμε θέσει ως προϋπόθεση, είναι σε θέση να αξιολογήσει και συνεπώς να κατατάξει τις ενδεχόμενες εκβάσεις του παιγνίου με βάση την ωφέλεια που προσλαμβάνει απ' αυτές, και έτσι να προτιμά κάποιες εκβάσεις περισσότερο από κάποιες άλλες ή να είναι αδιάφορος μεταξύ εκβάσεων που του παρέχουν την ίδια χρησιμότητα.

Επιπλέον, επειδή η ποσότητα ωφέλειας (ικανοποίησης) που λαμβάνει ο παίκτης από μια κατάσταση (έκβαση) είναι μια απολύτως υποκειμενική υπόθεση, κανένας εξωτερικός παρατηρητής δεν είναι σε θέση να προβεί σε συγκρίσεις ωφελιμότητας ανάμεσα σε ξεχωριστά άτομα. Είναι δυνατόν όμως, για έναν εξωτερικό παρατηρητή να αναπτύξει ένα μέσο είτε εκτίμησης «καταστάσεων» (π.χ. εκβάσεις) είτε «μεταβολής καταστάσεων» μέσω της αποτελεσματικότητάς τους.

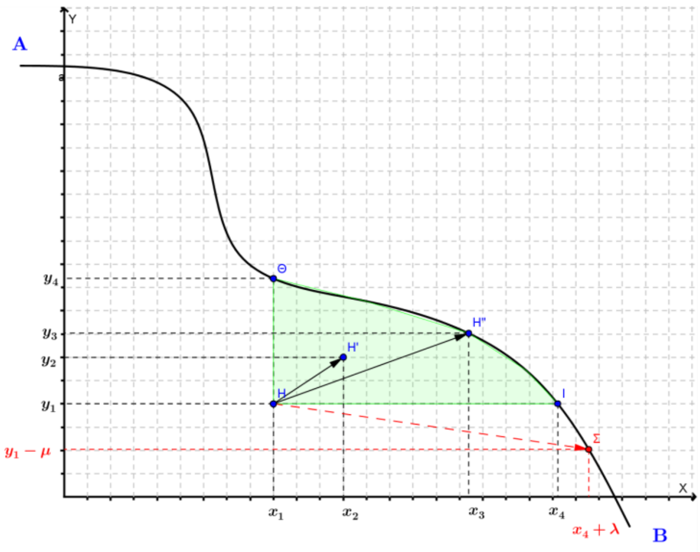
Υποστηρίζουμε, λοιπόν, ότι αυξάνεται η «ευημερία» όλων των εμπλεκόμενων παικτών αν μια υφιστάμενη «κατάσταση» L μεταβληθεί σε μια «νέα κατάσταση» L' στην οποία: (α) ο κάθε παίκτης βελτιώνει το προσωπικό του επίπεδο χρησιμότητας ή (β) τουλάχιστον ένας παίκτης βελτιώνει το επίπεδο χρησιμότητάς του χωρίς να χειροτερεύει το επίπεδο χρησιμότητας που λαμβάνει καθένας από τους άλλους εμπλεκόμενους παίκτες.

Αν λοιπόν σε οποιαδήποτε δεδομένη κατάσταση, διαπιστωθεί ότι **είναι αδύνατο** να επιφέρουμε *οποιαδήποτε* αλλαγή χωρίς να χειροτερεύσει η χρησιμότητα που προσλαμβάνει κάποιος από τους εμπλεκόμενους παίκτες, τότε λέμε ότι η κατάσταση αυτή είναι **αποτελεσματική κατά Pareto** ή ότι το αποτέλεσμα (έκβαση) είναι άριστο κατά Pareto[2].

Αντίστροφα, αν σε μια δεδομένη κατάσταση διαπιστωθεί ότι **είναι δυνατόν** να βελτιωθεί για έναν τουλάχιστον παίκτη η χρησιμότητα που προσλαμβάνει, χωρίς ταυτόχρονα να χειροτερεύσει η θέση κανενός άλλου εμπλεκόμενου, τότε λέμε ότι η κατάσταση αυτή **δεν είναι αποτελεσματική κατά Pareto.**

Είναι σημαντικό να τονιστεί, ότι η συνθήκη **αποτελεσματικότητας Pareto «***δεν λέει ότι κάθε μεταστροφή από μια μη-άριστη σε μια άριστη κατάσταση κατά Pareto αποτελεί το ίδιο το άριστο του Pareto. Ο κανόνας περιγράφει τα χαρακτηριστικά μιας* ***αλλαγής*** *και δεν συνδέεται άμεσα με το χαρακτηριστικό μιας κατάστασης ή συνθήκης πριν ή μετά την αλλαγή*[3]».

Για παράδειγμα, έστω ότι στους δύο άξονες του κατωτέρω διαγράμματος μετριέται η χρησιμότητα (ωφέλεια, ικανοποίηση) του παίκτη Υ και του παίκτη Χ, μέσω της έκφρασης των προτιμήσεων τους για τις διάφορες εκβάσεις σε μια κατάσταση στρατηγικής αλληλεπίδρασης. Κάθε σημείο κατά μήκος της οριακής καμπύλης ΑΒ αντιπροσωπεύει μια ισορροπία βέλτιστη κατά Pareto. Κάθε κίνηση από ένα τέτοιο σημείο προς ένα άλλο σημείο επάνω ή μέσα στο όριο μειώνει την ωφέλεια του ενός εκ των δύο παικτών.



Διάγραμμα 7

Έστω, ότι η αρχική κατάσταση ισορροπίας είναι το σημείο **Η** όπου το διάνυσμα απόδοσης που επιτυγχάνεται είναι (x_1, y_1). Επειδή θεωρήσαμε ότι όλες οι άριστες κατά Pareto εκβάσεις κείτονται επί της καμπύλης ΑΒ, η ισορροπία στο σημείο Η δεν είναι άριστη κατά Pareto (ομοίως είναι αναποτελεσματική κατά Pareto).

Μια αλλαγή ισορροπίας από το σημείο **Η** στο σημείο **Η''** δημιουργεί μια νέα κατάσταση **αποτελεσματική κατά Pareto** καθώς και οι δύο παίκτες στο σημείο Η'' (το οποίο είναι άριστο κατά Pareto, αφού κείται επί της καμπύλης ΑΒ) λαμβάνουν υψηλότερη χρησιμότητα από εκείνη που λάμβαναν στο σημείο Η, μιας και $x_3 > x_1$ και $y_3 > y_1$.

Αντίθετα, μια μετακίνηση από το σημείο **Η** στο σημείο **Σ** (το οποίο είναι άριστο κατά Pareto, αφού κείται επί της καμπύλης ΑΒ) **δεν** δημιουργεί μια νέα *αποτελεσματική* κατά Pareto

[2] Buchanan J. και Tullock G. (1999), σελ. 297-301
[3] Ό.π. σελ. 299

ισορροπία μιας και βελτιώνει τη χρησιμότητα του παίκτη Χ ($x_4 + \lambda > x_1$), αλλά μειώνει τη χρησιμότητα του παίκτη Υ ($y_1 - \mu < y_1$).

Έτσι, το κριτήριο Pareto δεν μας λέει ότι κάθε μετακίνηση από μια μη-άριστη κατά Pareto ισορροπία προς μια άριστη κατά Pareto είναι ταυτόχρονα και **αποτελεσματική κατά Pareto**.

Μια αλλαγή ισορροπίας από το σημείο **Η** στο σημείο **Θ** ή από το σημείο **Η** στο σημείο **Ι** είναι αποτελεσματική κατά Pareto καθώς βελτιώνει τη χρησιμότητα του ενός παίκτης χωρίς να χειροτερεύει τη χρησιμότητα του άλλου.

Επίσης, η μετατόπιση από το σημείο **Η** στο **Η'** είναι καθαυτή αποτελεσματική κατά Pareto καθώς βελτιώνει ταυτόχρονα τη χρησιμότητα και των δύο παικτών, παρότι αυτή η μετατόπιση πηγαίνει την ισορροπία από μια μη-άριστη σε μια επίσης μη-άριστη ισορροπία. Η μετατόπιση είναι αποτελεσματική κατά Pareto, αλλά το νέο σημείο ισορροπίας δεν είναι αποτελεσματικό κατά Pareto.

7. Ισορροπίες Nash και Nash-Pareto στα 2x2 κλασικά παίγνια.

Για μια συγκριτική παρουσίαση θεωρούμε την κατάταξη αποδόσεων $\boldsymbol{T} > \boldsymbol{R} > \boldsymbol{P} > \boldsymbol{S}$ η οποία είναι κοινή και για τους δύο εμπλεκόμενους και έτσι οι μήτρες των παιγνίων έχουν ως εξής:

		B	
		X	Y
A	X	R, R	$S_A, \boldsymbol{T}$
	Y	$\boldsymbol{T}, S$	$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}$

Μήτρα τύπου Δ.Φ.

		B	
		X	Y
A	X	P, P	$S, \boldsymbol{T}$
	Y	$\boldsymbol{T}, S$	$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}$

Μήτρα τύπου ΑΔιεξόδου

		B	
		X	Y
A	X	$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}$	S, S
	Y	S, S	$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}$

Μήτρα τύπου B.o.S.

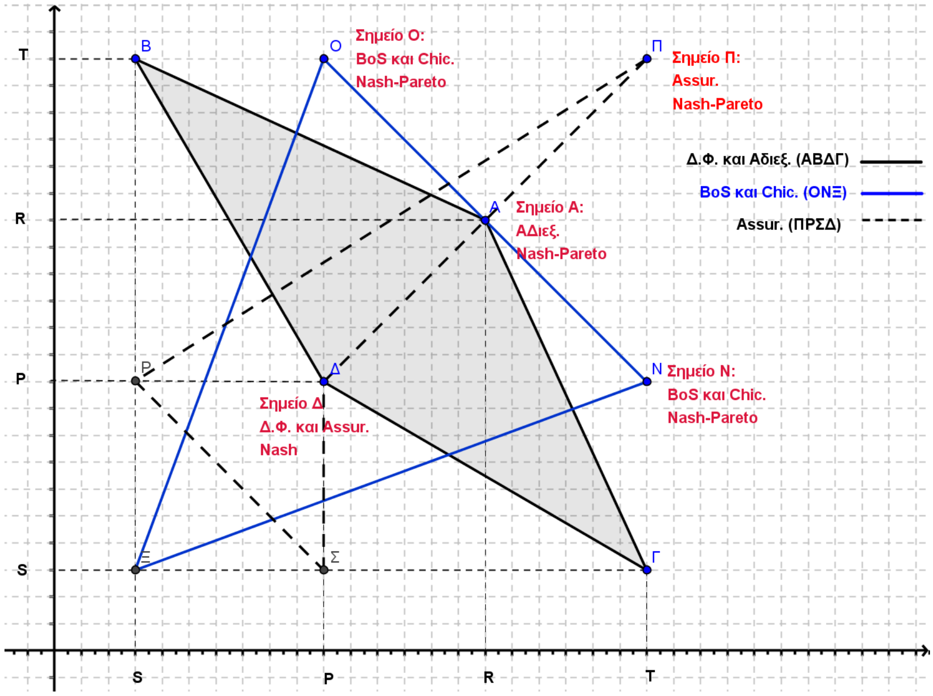
		B	
		X	Y
A	X	S, S	$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}$
	Y	$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}$	R, R

Μήτρα τύπου Chic.

		B	
		X	Y
A	X	$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}$	S, P
	Y	P, S	$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}$

Μήτρα τύπου Assur.
Πίνακας 6

Στο κατωτέρω διάγραμμα παρουσιάζεται μια θεωρητική κατάσταση στην οποία ελέγχονται οι ισορροπίες Nash και οι ισορροπίες Nash-Pareto, σε σχέση με τον τύπο του παιγνίου στο οποίο εμπλέκονται δύο παίκτες, οι οποίοι έχουν δεδομένη κατάταξη προτιμήσεων (συμμετρική και για τους δύο) και δύο όμοιες εναλλακτικές στρατηγικές.


Σημείο Ο:
BoS και Chic.
Nash-Pareto
Σημείο Π:
Assur.
Nash-Pareto
Δ.Φ. και Αδιεξ. (ΑΒΔΓ)
BoS και Chic. (ΟΝΞ)
Assur. (ΠΡΣΔ)
Σημείο Α:
ΑΔιεξ.
Nash-Pareto
Σημείο Ν:
BoS και Chic.
Nash-Pareto
Σημείο Δ
Δ.Φ. και Assur.
Nash
B
O
Π
A
Δ
Ρ
N
Ξ
Σ
Γ
T
R
P
S
S
P
R
T

Διάγραμμα 8