

Παράδειγμα εύρεσης μικτών στρατηγικών ισορροπίας («εκτέλεση πέναλτι»).

Στα ομαδικά αθλήματα η εύρεση της βέλτιστης απόκρισης στη στρατηγική του αντιπάλου είναι μια αυτονόητη πρακτική υποχρέωση του κάθε προπονητή. Με την κατίσχυση του επαγγελματικού πρωταθλητισμού η «πρακτική» δηλ. η εμπειρική - διαισθητική προσπάθεια προγραμματισμού του τρόπου με τον οποίο θα ανταποκριθεί μια ομάδα στις απαιτήσεις ενός αγώνα με έναν δεδομένο αντίπαλο, έπαψε να στηρίζεται στο διαισθητικό χάρισμα ενός ατόμου (του προπονητή) και έγινε αντικείμενο μελέτης από εξειδικευμένα άτομα που συνδράμουν με τις εισηγήσεις τους στη λήψη των σχετικών αποφάσεων από τον επαγγελματία προπονητή.

Πέρα από τα γενικότερα θέματα που εξετάζονται κατά την προετοιμασία της ομάδας για έναν αγώνα, όπως τα άτομα του roster της ομάδας που θα ξεκινήσουν τον αγώνα, το σύστημα ανάπτυξης της ομάδας, η διατροφή τους, το μεταβαλλόμενο επίπεδο έντασης των προπονήσεων της εβδομάδας πριν τον αγώνα κ.α., εξετάζονται και ειδικότερα θέματα που μπορούν να δώσουν ένα «στρατηγικό προβάδισμα» στην ομάδα, στην περίπτωση που συμβεί κάποιο συγκεκριμένο γεγονός κατά τη διάρκεια του αγώνα.

Για να γίνουμε σαφέστεροι, επιλέγεται ένα απλοϊκό παράδειγμα από το επαγγελματικό ποδόσφαιρο¹:

Έστω ότι μια ομάδα είχε στο roster της την προηγούμενη αγωνιστική περίοδο τον Τερματοφύλακα **T** και το γνωστό αστέρι της Επίθεσης **E**.

Το μέλος του προπονητικού Team της ομάδας που ήταν επιφορτισμένο με τη σχετική αρμοδιότητα, μετά από μακρά στατιστική ανάλυση των λακτισμάτων πέναλτι στις προπονήσεις, έχει καταγράψει τις επιδόσεις του **E** απέναντι στον **T**, και αντιστρόφως, οι οποίες φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

		Τερματοφύλακας (T)		
		A	K	Δ
Επιθετικός (E)	A	0, 5	2, 3	2, 3
	K	2, 3	0, 5	3, 2
	Δ	5, 0	3, 2	2, 3

Όπου:

A: Αριστερή γωνία

K: Κέντρο της εστίας

Δ: Δεξιά γωνία

Πίνακας 1 –Μικτές στρατηγικές στα πέναλτι

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι όταν ο συγκεκριμένος επιθετικός **E** επιλέγει να σημαδέψει στην αριστερή (**A**) γωνία του συγκεκριμένου Τερματοφύλακα **T** και αυτός επιλέξει να καλύψει τη δεξιά (**Δ**) γωνία της εστίας του, η απόδοση του **T** είναι 3 ενώ η απόδοση του **E** είναι 2 (ο επιθετικός είναι μάλλον άστοχος όταν επιλέγει να στοχεύσει στην αριστερή γωνία...).

Την επόμενη αγωνιστική περίοδο το αστέρι της ομάδας (δηλ ο παίκτης **E**) παίρνει μεταγραφή στον «αιώνιο» αντίπαλο της προηγούμενης ομάδας του. Μαζί με τον παίκτη, η αντίπαλη ομάδα αγόρασε και τον ανωτέρω πίνακα.

Η νέα αγωνιστική περίοδος βρίσκεται σε εξέλιξη και οι δύο ομάδες τίθενται αντιμέτωπες. Η προετοιμασία για το μεγάλο derby είναι σε πλήρη εξέλιξη, και τα προπονητικά επιτελεία εργάζονται πυρετωδώς για την καλύτερη προετοιμασία των ομάδων τους. Μεταξύ των

¹ Το εν λόγω παράδειγμα είναι μια σύνθεση των papers: Walker M. And Wooders J, Minimax Play at Wimbledon, The American Economic Review 91 No 5 (2001): 1521-1538, και Chiappori A., Levitt S. and Groseclose T. Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer, The American Economic Review, Vol. 92, No4 (2002):1138-1151. Ως αποδόσεις για τον Πίνακα χρησιμοποιούνται οι αντίστοιχες από το παράδειγμα του Watson (2013), στο Randomization in Sports, σελ. 135.

στοιχείων που αναλύει η παλαιά ομάδα του **E** είναι και ο τρόπος που εκτελεί τα πέναλτι, ώστε να δώσει τις κατάλληλες συμβουλές στον τερματοφύλακα **T** που θα υπερασπιστεί τα goalpost της ομάδας στο συγκεκριμένο derby.

Ας δούμε λοιπόν την ανάλυση που κάνει στον Τερματοφύλακα το προπονητικό team της ομάδας του:

Η στρατηγική **A** του Επιθετικού είναι κυριαρχούμενη από τη μικτή **K** και **Δ**, έτσι:

(α) Αν ο Τερματοφύλακας επιλέξει **A**, τόσο η **K** όσο και η **Δ** δίνουν στον **E** υψηλότερη απόδοση απ' ό τι η **A**,

(β) Αν ο Τερματοφύλακας επιλέξει **K**, η μικτή **K** και **Δ** δίνουν στον **E** υψηλότερη απόδοση απ' ό τι η **A**, αρκεί ο **E** να θέσει αρκετά υψηλή πιθανότητα στην **Δ**,

(γ) Αν ο Τερματοφύλακας επιλέξει **Δ**, η μικτή **K** και **Δ** δίνουν στον **E** υψηλότερη απόδοση απ' ό τι η **A**, αρκεί ο **E** να θέσει αρκετά υψηλή πιθανότητα στην **K**.

Για να γίνει ευδιάκριτο αυτό, αναφέρεται:

Έστω ότι ο **E** επιλέγει με πιθανότητα q τη στρατηγική **K** και με πιθανότητα $1 - q$ τη στρατηγική **Δ** (δηλ. επιλέγει την μικτή $(q, 1 - q)$).

Αν ο **T** επιλέξει **K**, τότε η αναμενόμενη απόδοση του **E** είναι:

$u_E = (0) \cdot q + 3 \cdot (1 - q) = 3 - 3q$, για να κυριαρχεί η μικτή αυτή στρατηγική έναντι της αμιγούς **A** θα πρέπει: $3 - 3q > 2 \Rightarrow q < \frac{1}{3}$ και $1 - q > \frac{2}{3}$. Αυτό σημαίνει ότι αν ο Επιθετικός παίζει τη μικτή στρατηγική **K** και **Δ** και επιπλέον αν επιλέγει τη **Δ** με πιθανότητα μεγαλύτερη από $\frac{2}{3}$ θα έχει υψηλότερη απόδοση απ' αυτή που θα είχε αν επέλεγε την αμιγή **A**.

Αντίστοιχα, μπορεί να δειχθεί ότι η μικτή **K** και **Δ** αποφέρει στον **E** υψηλότερη απόδοση από ό τι η **A**, αρκεί να επιλέγει την **K** με υψηλότερη πιθανότητα.

Αφού λοιπόν η στρατηγική του Επιθετικού να σημαδέψει την αριστερή (**A**) γωνία του Τερματοφύλακα είναι κυριαρχούμενη στρατηγική από μια μικτή των **K** και **Δ**, τότε η εν λόγω στρατηγική διαγράφεται από το σύνολο των ορθολογικών εναλλακτικών στρατηγικών του Επιθετικού και συνεπώς ο πίνακας αποδόσεων γίνεται:

		Τερματοφύλακας (T)		
		A	K	Δ
Επιθετικός (E)	K	2, 3	0, 5	3, 2
	Δ	5, 0	3, 2	2, 3

Πίνακας 2

Από τον ανωτέρω πίνακα διαπιστώνεται ότι η στρατηγική **A** του Τερματοφύλακα είναι κυριαρχούμενη από τη στρατηγική **K**, καθώς οι αποδόσεις που λαμβάνει είναι σταθερά υψηλότερες επιλέγοντας την **K** σε σχέση με την **A**, ανεξαρτήτως της επιλογής του Επιθετικού. Συνεπώς, στο επόμενο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής των κυριαρχούμενων στρατηγικών, ο πίνακας λαμβάνει την εξής μορφή:

		Τερματοφύλακας (Τ)	
		Κ	Δ
Επιθετικός (Ε)	Κ	0, <u>5</u>	<u>3</u> , 2
	Δ	<u>3</u> , 2	2, <u>3</u>

Το σεν των εκλογικευμένων στρατηγικών προφίλ του παιχνιδιού είναι πλέον το:

$$R = \{(K, \Delta), (K, \Delta)\}$$

Οι αποδόσεις που προσφέρουν οι βέλτιστες αποκρίσεις στις στρατηγικές του αντιπάλου, εμφανίζονται με υπογράμμιση

Πίνακας 3

Από τον ανωτέρω πίνακα είναι φανερό ότι δεν υπάρχει ισορροπία Nash (N.E.) σε αμιγείς στρατηγικές.

Άρα θα αναζητήσουμε N.E. σε μικτές στρατηγικές:

Έστω λοιπόν ότι ο Επιθετικός επιλέγει τη στρατηγική K με πιθανότητα p και τη στρατηγική Δ με πιθανότητα $1 - p$,

ενώ ο Τερματοφύλακας επιλέγει τη στρατηγική K με πιθανότητα q και τη στρατηγική Δ με πιθανότητα $1 - q$.

Οι αποδόσεις του Ε σε σχέση με τη μικτή στρατηγική του αντιπάλου είναι:

$$u_E^K = (0) \cdot q + 3 \cdot (1 - q) = 3 - 3q, \text{ η απόδοση όταν επιλέγει τη στρατηγική } K, \text{ και}$$

$$u_E^\Delta = (3) \cdot q + 2 \cdot (1 - q) = 2 + q, \text{ η απόδοση όταν επιλέγει τη στρατηγική } \Delta.$$

Προκειμένου ο Επιθετικός να είναι αδιάφορος μεταξύ των αποδόσεων που του αποφέρουν οι δύο αμιγείς στρατηγικές, και συνεπώς να καταφύγει στην υιοθέτηση μιας μικτής στρατηγικής, θα πρέπει $3 - 3q = 2 + q \Rightarrow q = \frac{1}{4}$ και $1 - q = \frac{3}{4}$

Αντίστοιχα, οι αποδόσεις του Τ σε σχέση με τη μικτή στρατηγική του αντιπάλου είναι:

$$u_T^K = (5) \cdot p + 2 \cdot (1 - p) = 2 + 3p, \text{ αν επιλέξει την αμιγή } K, \text{ και}$$

$$u_T^\Delta = (2) \cdot p + 3 \cdot (1 - p) = 3 - p, \text{ αν επιλέξει την αμιγή } \Delta.$$

Προκειμένου ο Τερματοφύλακας να είναι αδιάφορος μεταξύ των αποδόσεων που του προσφέρουν οι δύο αμιγείς στρατηγικές, και συνεπώς να καταφύγει στην υιοθέτηση μιας μικτής στρατηγικής, θα πρέπει $2 + 3p = 3 - p \Rightarrow p = \frac{1}{4}$ και $1 - p = \frac{3}{4}$

Συνεπώς, η μικτή στρατηγική ισορροπίας από την οποία κανείς από τους παίκτες δεν έχει

$$\text{κίνητρο να παρεκκλίνει μονομερώς είναι } N.E. = \left\{ \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \right\}$$

Συμπερασματικά το προπονητικό επιτελείο της ομάδας του Τερματοφύλακα, αν έπρεπε τη στιγμή της εκτέλεσης των πέναλτι να δώσει μια ξεκάθαρη οδηγία στον Τερματοφύλακα, θα του έλεγε να «πέφτει» Δεξιά με συχνότητα $\frac{3}{4}$ και να «κάθεται» στο κέντρο της εστίας του με συχνότητα $\frac{1}{4}$, καθώς αυτή η στρατηγική εμφανίζεται ως η βέλτιστη στρατηγική απόκρισης στη μικτή στρατηγική του αντιπάλου του.

Πρέπει να αποσαφηνιστεί ότι αυτή η επιλογή δεν διασφαλίζει στον Τερματοφύλακα βέβαιη απόκρουση του λακτίσματος του αντιπάλου. Του προσφέρει απλά την καλύτερη **αναμενόμενη** απόδοση. Άλλωστε, ακόμα κι αν επιλέξουν και οι δύο αντίπαλοι την ίδια γωνία (*συγχρονισμός των μικτών στρατηγικών*), δεν σημαίνει ότι η μπάλα δεν θα καταλήξει τελικά στα «δίχτυα» του Τερματοφύλακα...

Συνοπτικά, τα βήματα που ακολουθήσαμε προκειμένου να προσδιορίσουμε τις μικτές στρατηγικές των δύο αντιπάλων, είναι:

(1). Εύρεση του σετ των εκλογικευμένων στρατηγικών των δύο αντιπάλων, με τη διαδικασία της απαλοιφής των αυστηρώς κυριαρχούμενων στρατηγικών,

(2). Εστίαση της προσοχής στις εκλογικευμένες στρατηγικές. Καταγραφή εξισώσεων -που χαρακτηρίζουν τις πιθανότητες επιλογής κάθε στρατηγικής- για κάθε παίκτη, οι οποίες κάνουν τον άλλο παίκτη αδιάφορο μεταξύ των διαθέσιμων αμιγών στρατηγικών του.

(3). Επίλυση των εξισώσεων και καθορισμός της ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές.

Αν στο παράδειγμά μας, ο ένας από τους παίκτες είχε τρεις εκλογικευμένες αμιγείς στρατηγικές (δηλ. (A, K, Δ)), τότε οι έλεγχοι που θα έπρεπε να γίνουν θα ήταν: $(A, K, 0)$, $(A, 0, \Delta)$, $(0, K, \Delta)$ και (A, K, Δ) .

Ένα γενικό θεώρημα που έχει αποδειχθεί και παρουσιάστηκε από τον **John Nash**² είναι ότι **κάθε πεπερασμένο παίγνιο (με πεπερασμένο αριθμό παικτών και πεπερασμένο στρατηγικό χώρο) έχει τουλάχιστον μια ισορροπία σε καθαρές ή μικτές στρατηγικές.** Κατόπιν, η ισορροπία αυτή, προς τιμή του Nash, αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως Nash Equilibrium.

² Nash J. Non-Cooperative Games, Annals of Mathematics, 51 (1951):286-295