Παίγνια 2x2 με αυστηρή ιεράρχηση προτιμήσεων μεταξύ των εκβάσεων.

Μοντελοποιούμε μια μήτρα παραγωγής παιγνίων 2x2 των οποίων οι πίνακες αποδόσεων αποτυπώνουν τις προτιμήσεις των εμπλεκόμενων παικτών στις σχετικές εκβάσεις. Για την κατασκευή του μοντέλου μας θεωρούμε ότι οι παίκτες έχουν αυστηρές προτιμήσεις μεταξύ των ενδεχόμενων εκβάσεων και είναι σε θέση να διατάξουν τις προτιμήσεις τους με φθίνουσα σειρά κατάταξης.

Με τους περιορισμούς αυτούς, από τη μοντελοποιημένη μήτρα παράγονται **576** παίγνια τα οποία κατατάσσονται σε τρεις ισοπληθείς Τύπους με βάση την ύπαρξη κυρίαρχης στρατηγικής για τον παίκτη γραμμής (Τύπος I), για τον παίκτη στήλης (Τύπος II) ή και για τους δύο παίκτες (Τύπος III). Και στους τρεις αυτούς Τύπους παιγνίων της σχετικής μήτρας υπάρχει μια ισορροπία Nash (NE) σε αμιγείς στρατηγικές για κάθε παίγνιο. Στο Παράρτημα παρατίθενται οι ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές για όλους τους Τύπους των παραγόμενων παιγνίων της μήτρας.

Τέλος, υπάρχει και ένας τέταρτος (ισοπληθείς με τους προηγούμενους) τύπος παιγνίων (Τύπος IV) στα οποία οι παίκτες δεν έχουν κυρίαρχη (και άρα ούτε κυριαρχούμενη) στρατηγική. Στα μισά από τα παίγνια αυτού του τύπου (Τύπος IV.α) υπάρχουν δύο ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές, ενώ στα υπόλοιπα μισά του ίδιου τύπου (Τύπος IV.β) δεν υπάρχει καμία ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές.

Στα παίγνια του Τύπου IV.β προσδιορίζουμε την ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές και εισηγούμαστε μια τεχνική εύκολης ανεύρεσης των πιθανοτικών κατανομών των μικτών στρατηγικών, για τα παίγνια που παράγονται από τη συγκεκριμένη μήτρα. Κατόπιν, διερευνούμε τη δυνατότητα των παικτών να παίξουν διαφοροποιημένες μικτές στρατηγικές, σε σχέση με αυτές που οδηγούν στο σημείο NE, για να επιτύχουν βελτιστοποιημένες κατά Pareto αποδόσεις σε σχέση με τις αποδόσεις που επιτυγχάνουν στο NE.

Το μοντέλο μας λειτουργεί είτε οι παίκτες έχουν διακριτές είτε όμοιες εναλλακτικές επιλογές και επιπλέον είναι γενικό, καθώς δεν εξαρτάται από τις κάθε φορά εκτιμώμενες ποσοτικές τιμές στον πίνακα αποδόσεων, αλλά από την ποιοτική ιεράρχηση των προτιμήσεών τους για τις διάφορες εκβάσεις.

Υποστηρίζουμε ότι κάθε παίγνιο 2x2 στο οποίο ζητείται από τους εμπλεκόμενους να διατάξουν τις ενδεχόμενες εκβάσεις βάσει των προτιμήσεών τους με φθίνουσα σειρά κατάταξης, βρίσκει επίλυση στην παρούσα ανάλυση. Περαιτέρω, στα παίγνια αυτής της μορφής που δεν έχουν ισορροπία Nash (NE) σε αμιγείς στρατηγικές, προσδιορίζουμε το σύνολο των πιθανοτικών κατανομών που οδηγούν σε NE με μικτές στρατηγικές και αναδεικνύουμε τη δυνατότητα επίτευξης μιας ευσταθούς ισορροπίας που είναι βέλτιστη κατά Pareto σε σχέση με την ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Μοντελοποίηση

Δύο παίκτες, ο παίκτης 1 και ο παίκτης 2, εμπλέκονται σε ένα στρατηγικό παίγνιο (G) ταυτόχρονων κινήσεων και καλούνται να επιλέξουν μεταξύ δύο διακριτών εναλλακτικών επιλογών, που ο καθένας από αυτούς διαθέτει. Το παίγνιο είναι στρατηγικό γιατί οι συνέπειες (δηλ. το αποτέλεσμα) της επιλογής του ενός καθορίζονται αναπόδραστα από την επιλογή του άλλου, και είναι ταυτόχρονων κινήσεων γιατί οι συμμετέχοντες τη στιγμή που διαλέγουν μια εκ των εναλλακτικών τους επιλογών δεν γνωρίζουν την επιλογή που ο άλλος παίκτης έκανε.

Ο παίκτης 1 μπορεί να επιλέξει μεταξύ της στρατηγικής P και της στρατηγικής K, ενώ ο παίκτης 2 μεταξύ της στρατηγικής A και D (Πίνακας 1). Συνεπώς, ο στρατηγικός χώρος του παίκτη 1 είναι: X_1 = {P, K} και του παίκτη 2 είναι: X_2 = {A, D}.

Ο στρατηγικός χώρος του παιγνίου είναι: X = $\{X_1 x\ X_2\}$.

Και οι δύο παίκτες είναι σε θέση να ιεραρχήσουν ποιοτικά τις προτιμήσεις τους, από την περισσότερο ευνοϊκή (=1^η) έως την χειρότερη δυνατή(=4^η), βάσει της κίνησης που οι ίδιοι θα επιλέξουν και σε συνάρτηση με την εικαζόμενη επιλογή του άλλου παίκτη. Η ιεράρχηση των προτιμήσεων των παικτών αποτελεί **κοινή γνώση** και οι αποδόσεις τους αποτελούν ποιοτικές διατάξιμες μεταβλητές των οποίων οι τιμές καθορίζονται από τις προτιμήσεις των παικτών για κάθε ενδεχόμενη έκβαση και κατατάσσονται **με φθίνουσα σειρά** (δηλ. η 1^η προτίμηση υπερέχει (>>) της 2^{ης} , η οποία υπερέχει (>>) της 3^{ης}, η οποία υπερέχει (>>) της 4^{ης}). Οι παίκτες είναι **ορθολογικοί** και κατά τούτο επιθυμούν εκβάσεις με κατά το δυνατόν βέλτιστες προτιμήσεις για τους ίδιους.
Η λεκτική αποτίμηση των προτιμήσεων των παικτών για κάθε ενδεχόμενη έκβαση του παιγνίου, έστω ότι είναι η εξής:

Σειρά προτίμησης	Λεκτικό
1^η	Πολύ καλή έκβαση
2^η	Καλή έκβαση
3^η	Κακή έκβαση
4^η	Πολύ κακή έκβαση

Έτσι, το παίγνιο αυτό (G) είναι μια συλλογή: $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{N}, (\boldsymbol{X_i}\ , \boldsymbol{u_i})\ _{i \in \boldsymbol{N}}\}$**,** όπου:

$\boldsymbol{N} = \{1,2\}$: οι εμπλεκόμενοι παίκτες (παίκτης 1 και παίκτης 2)

$\boldsymbol{X_i}$: το σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών[1] του παίκτη i (για τον παίκτη 1: X_1 = {P, K} και για τον παίκτη 2: X_2 = {A, D}), και

$\boldsymbol{u_i}$: $X \rightarrow\ [1 \ldots 4]$, η συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i, η οποία λαμβάνει τιμές στο διάστημα [1…4].

Η μήτρα του παιγνίου έχει τη μορφή του Πίνακα 1, με τους περιορισμούς που αναφέρονται παραπλεύρως:

Πίνακας 1

		2	
		A	**D**
1	**P**	$\boldsymbol{W_{αα}}$ **,** $\boldsymbol{W_{αβ}}$	$\boldsymbol{W_{αγ}}$ **,** $\boldsymbol{W_{αδ}}$
	K	$\boldsymbol{W_{βα}}$ **,** $\boldsymbol{W_{ββ}}$	$\boldsymbol{W_{βγ}}$ **,** $\boldsymbol{W_{βδ}}$

Με τους εξής περιορισμούς:

$W_{i\,j} = 1, 2, 3, 4$, με $i = α, β\ και\ j = α, β, γ, δ$

$W_{αα} \neq W_{αγ} \neq W_{βα} \neq W_{βγ}$ και

$W_{αβ} \neq W_{αδ} \neq W_{ββ} \neq W_{βδ}$

Από την εν λόγω μήτρα με τους συγκεκριμένους περιορισμούς, παράγονται: $4! \cdot 4! =$ **576** παίγνια.

Τα παίγνια που παράγονται από την εν λόγω μήτρα με τους συγκεκριμένους περιορισμούς παρουσιάζονται στο Παράρτημα και μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:

Τύπος	Χαρακτηριστικό παιγνίων	Πλήθος Παιγνίων
I.	Ο παίκτης 1 (παίκτης γραμμής) έχει κυρίαρχη στρατηγική, ενώ ο παίκτης 2 (παίκτης στήλης) δεν έχει.	144
II.	Ο παίκτης 2 (παίκτης στήλης) έχει κυρίαρχη στρατηγική ενώ ο παίκτης 1 (παίκτης γραμμής) δεν έχει.	144
III.	Ο παίκτης 1 και ο παίκτης 2 έχουν κυρίαρχη στρατηγική.	144
IV.	Κανείς από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική.	144
	Σύνολο παιγνίων:	**576**

[1] Η δόμηση του παιγνίου, οι αναμενόμενες εκβάσεις και γενικά τα αντλούμενα συμπεράσματα από την σχετική ανάλυση δεν μεταβάλλονται όταν τεθεί ο πρόσθετος περιορισμός $X_1 = X_2$ = {P, K} ή $X_1 = X_2$ = {A, D}.

Στα παίγνια **τύπου I**, ο παίκτης 1 (παίκτης γραμμής) έχει **κυρίαρχη στρατηγική** ενώ ο παίκτης 2 (παίκτης στήλης) δεν έχει. Σε αυτά τα παίγνια υπάρχει **μία ισορροπία Nash** (***NE***) σε αμιγείς στρατηγικές, η οποία θεωρούμε ότι αποτελεί την έκβαση του παιγνίου. Μερικά από τα παίγνια αυτά με τις συγκεκριμένες ιδιότητες παρατίθενται κατωτέρω (στο Παράρτημα παρατίθενται στο σύνολό τους).

Παραδείγματα Παιγνίων τύπου I: *(ο παίκτης γραμμής με κυρίαρχη στρατηγική και μία αμιγής NE)*

1,1	2,2	1,3	2,4	2,2	4,4	3,1	1,2	3,3	4,2	3,4	1,1	4,4	3,2
3,4	4,3	3,2	4,1	1,3	3,1	4,4	2,3	2,1	1,4	4,2	2,3	2,1	1,3

Όπως επισημάνθηκε ήδη, οι αποδόσεις των παικτών σε κάθε κελί του κάθε πίνακα αντιπροσωπεύουν τις προτιμήσεις τους σε κάθε ενδεχόμενη έκβαση και οι προτιμήσεις τους ακολουθούν φθίνουσα σειρά κατάταξης (δηλ. 1 >> 2 >> 3 >> 4).

<u>Ορισμός 1</u>: Στο παίγνιο $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{N}, (\boldsymbol{X_i}, \boldsymbol{u_i})_{\,i \in N}\}$**, με αποδόσεις σε φθίνουσα σειρά κατάταξης βάσει των προτιμήσεων των παικτών**, η στρατηγική x_i του παίκτη i κυριαρχεί αυστηρά επί της στρατηγικής $\widetilde{x_i}$ εάν: $\boldsymbol{u_i}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_{-i}}) < \boldsymbol{u_i}(\widetilde{\boldsymbol{x_i}}, \boldsymbol{x_{-i}})\ \forall\ \boldsymbol{x_{-i}} \in \boldsymbol{X_{-i}}$.

Έτσι, π.χ. ο παίκτης 1 στο παίγνιο G (για τα παίγνια τύπου I) **έχει κυρίαρχη** στρατηγική εάν:

$$W_{\alpha\alpha} < W_{\beta\alpha}\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\ W_{\alpha\gamma} < W_{\beta\gamma} \quad ή \quad W_{\alpha\alpha} > W_{\beta\alpha}\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\ W_{\alpha\gamma} > W_{\beta\gamma}$$

ενώ ο παίκτης 2 **δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική** εάν:

$$W_{\alpha\beta} < W_{\alpha\delta}\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\ W_{\beta\beta} > W_{\beta\delta} \quad \textbf{ή} \quad W_{\alpha\beta} > W_{\alpha\delta}\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\ W_{\beta\beta} < W_{\beta\delta}$$

<u>Ορισμός 2</u>: Ισορροπία Nash (NE) είναι μια εκ των πιθανών εκβάσεων ενός παιγνίου, στην οποία όταν καταλήγουν οι παίκτες που εμπλέκονται σ' αυτό δεν έχουν κίνητρο να μετακινηθούν μονομερώς, δηλ. δεν επιθυμούν να αλλάξουν τη στρατηγική που ακολούθησαν για να καταλήξουν σε αυτή την έκβαση, με δεδομένο ότι και οι άλλοι παίκτες διατηρούν τις δικές τους στρατηγικές επιλογές που τους οδήγησαν στην συγκεκριμένη έκβαση.
Αυστηρότερα, είναι ένας συνδυασμός στρατηγικών, μια για κάθε παίκτη, τέτοιος ώστε η στρατηγική του κάθε παίκτη να βελτιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλεία του έναντι των δεδομένων στρατηγικών των άλλων παικτών (Myerson, 1999).

Στο παίγνιο $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{N}, (\boldsymbol{X_i}, \boldsymbol{u_i})_{\,i \in N}\}$, ο συνδυασμός στρατηγικών $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ συνιστά ισορροπία Nash εάν για κάθε $i \in N$ (δηλ. για $i = 1,2$),

$$\boldsymbol{u_i}(\boldsymbol{x_i^*}, \boldsymbol{x^*_{-i}}) \leq \boldsymbol{u_i}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x^*_{-i}}) \text{ για κάθε } \boldsymbol{x_i} \in \boldsymbol{X_i} \text{ , όπου: } -i \neq i$$

Ο παραπάνω ορισμός αναφέρει ρητά ότι ο συνδυασμός στρατηγικών $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ εμπεριέχει τις **αμοιβαία βέλτιστες** στρατηγικές των δύο παικτών. Με δεδομένη τη βέλτιστη επιλογή του άλλου παίκτη ($\boldsymbol{x^*_{-i}}$) , η βέλτιστη επιλογή του παίκτη i είναι η $\boldsymbol{x_i^*}$. Η επιλογή αυτή είναι βέλτιστη, επειδή του αποφέρει την **καλύτερη** δυνατή ωφέλεια (δηλ. <u>την υψηλότερη σειρά κατάταξης με βάση τις προτιμήσεις του</u>) από εκείνη που θα του επέφερε οποιαδήποτε άλλη από τις διαθέσιμες επιλογές του, με δεδομένη την επιλογή του αντιπάλου του.

Στα παίγνια **τύπου II**, ο παίκτης 2 (παίκτης στήλης) έχει **κυρίαρχη στρατηγική** ενώ ο παίκτης 1 δεν έχει. Και σε αυτά τα παίγνια υπάρχει μία ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές, η οποία θεωρούμε ότι αποτελεί την έκβαση του παιγνίου. Παραδείγματα τέτοιων παιγνίων δίνονται κατωτέρω.

Παραδείγματα Παιγνίων τύπου II: *(ο παίκτης στήλης με κυρίαρχη στρατηγική και μία αμιγής NE)*

1,2	3,1	2,2	4,3	2,4	4,1	3,2	2,1	3,1	2,2	4,1	1,2	4,2	1,4
4,4	2,3	3,1	1,4	3,3	1,2	1,4	4,3	4,3	1,4	3,3	2,4	3,1	2,3

Στα παίγνια **τύπου ΙΙΙ**, τόσο ο παίκτης 1 όσο και ο παίκτης 2 έχουν κυρίαρχες στρατηγικές. Και σε αυτά τα παίγνια υπάρχει μία ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές, η οποία θεωρούμε ότι αποτελεί την έκβαση του παιγνίου. Παραδείγματα τέτοιων παιγνίων δίνονται κατωτέρω.

Σημειώνεται ότι **τέσσερα** από τα παίγνια αυτά έχουν μήτρα αποδόσεων παιγνίου τύπου Prisoner's dilemma (δηλ. εάν επέλεγαν και οι δύο παίκτες τις κυριαρχούμενες στρατηγικές τους θα κατέληγαν σε καλύτερες εκβάσεις από τις εκβάσεις που λαμβάνουν στην ισορροπία Nash).

Παραδείγματα Παιγνίων τύπου ΙΙΙ: *(και οι δύο παίκτες έχουν κυρίαρχη στρατηγική και μία αμιγής ΝΕ)*													
1,1	3,4	1,4	2,2	2,1	4,2	3,3	4,1	4,1	2,2	4,3	3,1	4,4	3,3
2,2	4,3	4,3	3,1	1,3	3,4	1,4	2,2	3,3	1,4	2,4	1,2	1,2	2,1
								Prisoners dilemma					

Στα παίγνια **τύπο IV**, κανείς από τους παίκτες δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική. Σε εβδομήντα δύο (72) παίγνια αυτού του τύπου υπάρχει διπλή ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές και στα άλλα εβδομήντα δύο (72) δεν υπάρχει ισορροπία (ΝΕ) σε αμιγείς στρατηγικές. Παραδείγματα τέτοιων παιγνίων, με και χωρίς ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές, δίνονται κατωτέρω.

Παραδείγματα Παιγνίων τύπου IV.α: *(Κανείς παίκτης δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική-* ***δύο ΝΕ*** *σε αμιγείς).*													
1,1	3,2	1,2	3,4	3,2	2,3	3,2	2,4	4,2	2,1	4,4	1,2	1,2	4,4
4,4	2,3	4,3	2,1	4,4	1,1	4,3	1,1	1,3	3,4	2,1	3,3	2,3	3,1

Παραδείγματα Παιγνίων τύπου IV.β: *(Κανείς παίκτης δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική-* ***χωρίς*** *ΝΕ σε αμιγείς).*													
1,4	4,2	1,3	4,1	2,4	4,3	3,3	1,4	4,1	1,3	3,3	2,2	4,3	1,4
3,1	2,3	3,2	2,4	3,1	1,2	2,2	4,1	2,4	3,2	4,1	1,4	3,2	2,1

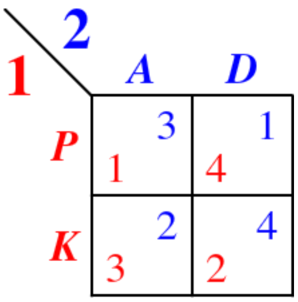
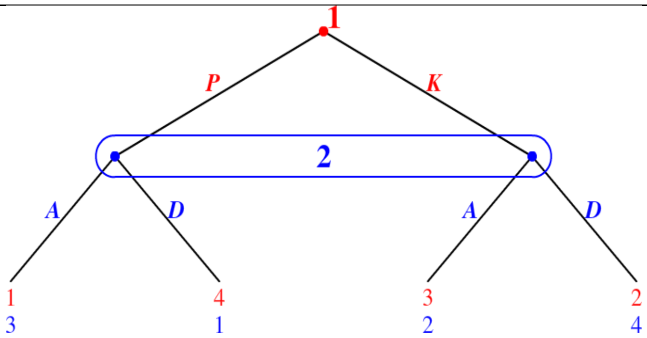
Παράδειγμα εύρεσης μικτών στρατηγικών ισορροπίας.

Στον κατωτέρω Πίνακα 2 παρουσιάζεται το γραμμοσκιασμένο παίγνιο της ανωτέρω συλλογής παιγνίων, το οποίο είναι ένα από τα 72 παίγνια στα όποια δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για κανέναν από τους δύο παίκτες και δεν υπάρχει σημείο ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές, προκειμένου να βρούμε τουλάχιστον μία ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Στο συγκεκριμένο παίγνιο (βλ. και Πίνακα 2 κατωτέρω), για τον παίκτη 1 η βέλτιστη έκβαση (με βάση τις προτιμήσεις του) είναι το προφίλ στρατηγικών (P, A), η λιγότερο καλή έκβαση είναι το προφίλ (K, D), ενώ το προφίλ (K, A) αποτελεί μια κακή έκβαση και το προφίλ (P, D) μια πολύ κακή έκβαση.

Για τον παίκτη 2, η βέλτιστη έκβαση είναι το προφίλ (P, D), λιγότερο καλή έκβαση είναι το προφίλ (K, A), ενώ το προφίλ (P, A) αποτελεί μια κακή έκβαση και το προφίλ (K, D) μια πολύ κακή έκβαση.

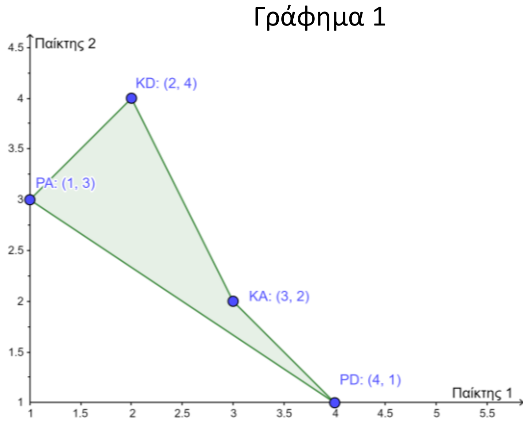
Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται το παίγνιο σε κανονική (ή στρατηγική) μορφή (normal or strategic form) και στο Δέντρο 1 το ισοδύναμό του σε εκτεταμένη (δυναμική) μορφή (extensive form).

<table>
<tr><th>Πίνακας 2</th><th>Δένδρο 1</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Παίγνιο ιεράρχησης Προτιμήσεων σε στρατηγική μορφή (Παίγνιο Γ-Γ, τύπου IV.β)</td><td>Παίγνιο ιεράρχησης Προτιμήσεων σε εκτεταμένη μορφή.
Σημείωση: Το σύνολο πληροφόρησης του παίκτη 2 αποτελείται από δύο κόμβους, καθώς ο παίκτης δεν γνωρίζει την επιλογή του άλλου πριν προβεί στην δική του επιλογή.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σειρά προτίμησης: $1^{η}$ >> $2^{η}$ >> $3^{η}$ >> $4^{η}$, όπου 1=Πολύ Καλή, 2=Καλή, 3=Κακή, 4=Πολύ Κακή</td></tr>
</table>

Στρατηγικό Προφίλ	**Προφίλ Αποτίμησης**	**Αποτίμηση έκβασης για τον Παίκτη 1**	**Αποτίμηση έκβασης για τον Παίκτη 2**
(P , A)	($1^{η}$, $3^{η}$)	Πολύ Καλή	Κακή
(P , D)	($4^{η}$, $1^{η}$)	Πολύ Κακή	Πολύ Καλή
(K , A)	($3^{η}$, $2^{η}$)	Κακή	Καλή
(K , D)	($2^{η}$, $4^{η}$)	Καλή	Πολύ Κακή

Όπως αναφέραμε, το παίγνιο 2x2 του Πίνακα 2 δεν έχει κυρίαρχες και (συνεπώς ούτε) κυριαρχούμενες στρατηγικές και επιπλέον δεν έχει **ισορροπία Nash** σε αμιγείς (καθαρές) στρατηγικές.

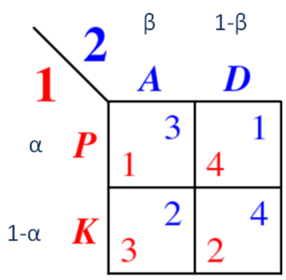
Γράφημα 1



Όπως έχει αποδείξει ο Nash (1951), κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών στο οποίο ο κάθε παίκτης έχει πεπερασμένο αριθμό διαθέσιμων στρατηγικών, έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

Διατάσσοντας τα προφίλ των στρατηγικών των δύο παικτών στο επίπεδο, βάσει των ιεραρχημένων προτιμήσεων των δύο παικτών, και ενώνοντας τα σημεία, σχηματίζεται το παραπλεύρως πολύγωνο, εντός του οποίου αναμένουμε ότι θα βρίσκεται το σημείο ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές.

Στον άξονα X είναι η ιεράρχηση των προτιμήσεων του **παίκτη 1** και στο άξονα Y η ιεράρχηση των προτιμήσεων του **παίκτη 2**. Σημειώνεται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ότι η τιμή 1 είναι καλύτερη της 2, η 2 καλύτερη της 3 κ.ο.κ.



Για την εύρεση του σημείου ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές, ο παίκτης 1 $υποθέτει$ ότι ο 2 θα επιλέξει την στρατηγική A με πιθανότητα β και την στρατηγική D με πιθανότητα $1-\beta$, όπου $\beta \in [0,1]$. Ομοίως, ο παίκτης 2 $υποθέτει$ ότι ο 1 θα επιλέξει την στρατηγική P με πιθανότητα α και την στρατηγική K με πιθανότητα $1-\alpha$, όπου $\alpha \in [0,1]$.

Ορισμός 3: όταν λέμε ότι ο παίκτης $\boldsymbol{i}$ $\upsilon\pi o\vartheta\acute{\varepsilon}\tau\varepsilon\iota$ ότι ο παίκτης $-\boldsymbol{i}$ θα επιλέξει μια από τις διαθέσιμες στρατηγικές του με πιθανότητα $\boldsymbol{\pi}$ εννοούμε ότι αναπτύσσει μια μαθηματική πεποίθηση: Η **πεποίθηση** του παίκτη $\boldsymbol{i}$ για τη στρατηγική συμπεριφορά του παίκτη $-\boldsymbol{i}$**,** είναι μια συνάρτηση $\boldsymbol{\theta_{-i}}$, με $\theta_{-i} \in \Delta X_{-i}$ (όπου, ΔX_{-i} το σύνολο της πιθανοτικής κατανομής όλων των διαθέσιμων στρατηγικών του παίκτη $-\boldsymbol{i}$) τέτοια ώστε για κάθε στρατηγική $\boldsymbol{x_{-i}} \in X_{-i}$ του παίκτη $-i$, η $\boldsymbol{\theta_{-i}(x_{-i})}$ είναι η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης $\boldsymbol{i}$ πιστεύει ότι ο παίκτης $-i$ θα παίξει τη στρατηγική $\boldsymbol{x_{-i}}$.
Ως πιθανοτική κατανομή, η $\boldsymbol{\theta_{-i}}$ έχει τις ιδιότητες: $\boldsymbol{\theta_{-i}(x_{-i})} \geq$ **0 για κάθε** $\boldsymbol{x_{-i}} \in \boldsymbol{X_{-i}}$ και $\sum \boldsymbol{\theta_{-i}(x_{-i})}$ **=1**

Στο υπόδειγμά μας, ο παίκτης 1 αναπτύσσει την πεποίθηση $\boldsymbol{\theta_2(x_2) = \beta\, A + (1-\beta)\, D}$**,** με $\beta + (1-\beta) = 1$ και ο παίκτης 2 αναπτύσσει την πεποίθηση $\boldsymbol{\theta_1(x_1) = \alpha\, P + (1-\alpha)\, K}$**,** με $\alpha + (1-\alpha) = 1$.

Οι αναμενόμενες αποδόσεις (ομοίως, η προσδοκώμενη προτίμηση) **για τον Παίκτη 1, είναι :**

$$\left.\begin{aligned} U_1^P &= \beta + 4(1-\beta) \\ U_1^K &= 3\beta + 2(1-\beta) \end{aligned}\right\}$$

Αν $\boldsymbol{U_1^P > U_1^K}$ [ή $o\mu o\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\nu\ \beta + 4(1-\beta) > 3\beta + 2(1-\beta)$] ⇒ ο παίκτης 1 θα επέλεγε την αμιγή στρατηγική K[2], ενώ αν $\boldsymbol{U_1^P < U_1^K}$ ⇒ ο παίκτης 1 θα επέλεγε την αμιγή στρατηγική P.
Έτσι, μόνο όταν $\boldsymbol{\beta + 4(1-\beta) = 3\beta + 2(1-\beta)}$ **ή** $\boldsymbol{\beta = \frac{1}{2}}$ ο παίκτης 1 είναι αδιάφορος μεταξύ των διαθέσιμων εναλλακτικών επιλογών P και K.

Οι αναμενόμενες αποδόσεις (ομοίως, η προσδοκώμενη προτίμηση) **για τον Παίκτης 2, είναι:**

$$\left.\begin{aligned} U_2^A &= 3a + 2(1-a) \\ U_2^D &= a + 4(1-a) \end{aligned}\right\}$$

Αν $\boldsymbol{U_2^A > U_2^D}$ [ή $o\mu o\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\nu\ 3a + 2(1-a) > \alpha + 4(1-\alpha)$] ⇒ ο παίκτης 2 θα επέλεγε την αμιγή στρατηγική D[3], ενώ αν $\boldsymbol{U_2^A < U_2^D}$ ⇒ ο παίκτης 2 θα επέλεγε την αμιγή στρατηγική A.
Έτσι, μόνο όταν $\boldsymbol{3a + 2(1-a) = \alpha + 4(1-\alpha)}$ **ή** $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ **,** ο παίκτης 2 είναι αδιάφορος μεταξύ των διαθέσιμων εναλλακτικών A και D.

Από τα ανωτέρω συνάγεται ότι η βέλτιστη απόκριση του παίκτη 1 στην εικαζόμενη στρατηγική του παίκτη 2, είναι: $BR_1 = (\frac{1}{2}P, \frac{1}{2}K)$, και
η βέλτιστη απόκριση του παίκτη 2 στην εικαζόμενη στρατηγική του παίκτη 1, είναι: $BR_2 = (\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}D)$.
Συνεπώς, σημείο ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές αποτελεί το στρατηγικό προφίλ:

$$\boldsymbol{NE = \{(\tfrac{1}{2}P, \tfrac{1}{2}K)\, , (\tfrac{1}{2}A, \tfrac{1}{2}D)\}}$$

Πως μπορεί να ερμηνευτεί η στρατηγική βέλτιστης απόκρισης του παίκτη 1 : $(\frac{1}{2}P, \frac{1}{2}K)$, με δεδομένο ότι έχει δύο διακριτές εναλλακτικές στρατηγικές επιλογές (P ή K) οι οποίες δεν επιμερίζονται;
Η απάντηση είναι ότι θα πρέπει να επιλέξει με τυχαίο (μη συστηματικό) τρόπο είτε την στρατηγική P είτε την K με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Η βέλτιστη απόκριση με μικτές στρατηγικές γίνεται περισσότερο κατανοητή και εύλογη εάν υποθέσουμε ότι το συγκεκριμένο παίγνιο επαναλαμβάνεται στο διηνεκές με τους ίδιους εμπλεκόμενους: (Οι παίκτες στον πρώτο γύρο (t=1) του παιγνίου επιλέγουν τη στρατηγική τους χωρίς να γνωρίζουν τη στρατηγική που επέλεξε ο άλλος παίκτης. Στο τέλος του πρώτου γύρου λαμβάνουν τις αποδόσεις με βάση τις επιλογές τους. Στον επόμενο γύρο (t=2) επί του ίδιου πίνακα αποδόσεων του παιγνίου προβαίνουν εκ νέου στις επιλογές τους γνωρίζοντας όμως την επιλογή που ο άλλος παίκτης είχε

[2] Επισημαίνεται ότι ο παίκτης 1 επιθυμεί την **ελαχιστοποίηση** της τιμής της αναμενόμενης απόδοσης, καθώς αυτή αποτυπώνει την ιεράρχηση των προτιμήσεών του, οι οποίες διατάχθηκαν με φθίνουσα σειρά.
[3] Ό.π. και για τον ίδιο λόγο ο παίκτης 2 επιθυμεί την **ελαχιστοποίησης** της τιμής της αναμενόμενης απόδοσης.

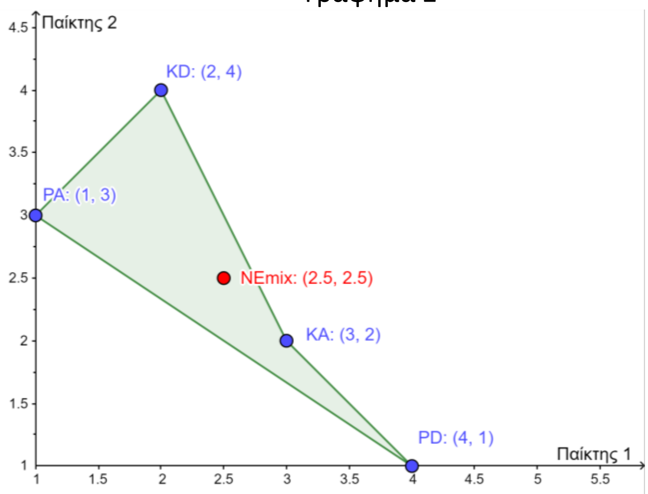
κάνει κατά τον προηγούμενο γύρο (t=1). Η ίδια διαδικασία επί του ίδιου πίνακα αποδόσεων του παιγνίου επαναλαμβάνεται στο διηνεκές).

Με βάση το προφίλ των στρατηγικών ισορροπίας,
η έκβαση (P, A) με προτιμήσεις (1,3) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha \cdot \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$,
η έκβαση (P, D) με προτιμήσεις (4,1) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha(1-\beta) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$,
η έκβαση (K, A) με προτιμήσεις (3,2) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)\beta = \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$,
η έκβαση (K, D) με προτιμήσεις (2,4) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)(1-\beta) = \mathbf{\frac{1}{4}}$.

Στο σημείο ισορροπίας (NE), η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι: $\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{4}\,1 + \frac{1}{4}\,4 + \frac{1}{4}\,3 + \frac{1}{4}\,2 = \mathbf{\frac{5}{2}}$ και του παίκτη 2: $\boldsymbol{U_2} = \frac{1}{4}\,3 + \frac{1}{4}\,1 + \frac{1}{4}\,2 + \frac{1}{4}\,4 = \mathbf{\frac{5}{2}}$.
Συνεπώς, οι αποδόσεις των παικτών στο προφίλ ισορροπίας θα είναι $\left(\mathbf{\frac{5}{2}}, \mathbf{\frac{5}{2}}\right)$ ή, ομοίως $(\mathbf{2.5}, \mathbf{2.5})$.

Σημειώνεται ότι η ιεράρχηση των προτιμήσεων των παικτών είναι διατάξιμη και συνεπώς η αναμενόμενη έκβαση (ομοίως, η έκβαση της προσδοκώμενης προτίμησης) βρίσκεται μεταξύ των εκτιμήσεων: **καλή** (= 2) και **κακή** (=3). Στο κατωτέρω Γράφημα απεικονίζεται το σημείο ισορροπίας Nash.

Γράφημα 2



Γενική εύρεση μικτής στρατηγικής στα παίγνια χωρίς ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές του Πίνακα 1.

Όπως αναφέρθηκε, όλα τα παίγνια τύπου I, II και III που παράγονται από την μήτρα του πίνακα 1 έχουν μια ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές. Τα μισά από τα παίγνια του τύπου IV έχουν δύο ισορροπίες σε αμιγείς στρατηγικές (τύπου IV.α), ενώ τα άλλα μισά (δηλ. τα υπόλοιπα 72) δεν έχουν ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές (τύπου IV.β). Για την εύρεση των μικτών στρατηγικών ισορροπίας εργαζόμαστε όπως στο ανωτέρω παράδειγμα.

Πίνακας 3	
<table><tr><td></td><td></td><td colspan="2">**2**</td></tr><tr><td></td><td></td><td>**β A**</td><td>**(1-β) D**</td></tr><tr><td rowspan="2">**1**</td><td>**α P**</td><td>$\mathbf{W_{\alpha\alpha}}$, $\mathbf{W_{\alpha\beta}}$</td><td>$\mathbf{W_{\alpha\gamma}}$, $\mathbf{W_{\alpha\delta}}$</td></tr><tr><td>**(1-α) K**</td><td>$\mathbf{W_{\beta\alpha}}$, $\mathbf{W_{\beta\beta}}$</td><td>$\mathbf{W_{\beta\gamma}}$, $\mathbf{W_{\beta\delta}}$</td></tr></table>	Όπου, α: η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης 1 θα επιλέξει τη στρατηγική P και 1-α, η πιθανότητα με την οποία θα επιλέξει τη στρατηγική K. Αντίστοιχα, β: η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης 2 θα επιλέξει τη στρατηγική A και 1-β, η πιθανότητα με την οποία θα επιλέξει τη στρατηγική D.

Οι γενικοί περιορισμοί που αφορούν στη μήτρα παραγωγής των παιγνίων είναι:
$W_{i\,j} = 1, 2, 3, 4$, με $i = \alpha, \beta$ $\kappa\alpha\iota$ $j = \alpha, \beta, \gamma, \delta$
$W_{\alpha\alpha} \neq W_{\alpha\gamma} \neq W_{\beta\alpha} \neq W_{\beta\gamma}$ και
$W_{\alpha\beta} \neq W_{\alpha\delta} \neq W_{\beta\beta} \neq W_{\beta\delta}$.
Και οι περιορισμοί που προκύπτουν από την μη ύπαρξη κυρίαρχων στρατηγικών και την μη ύπαρξη ισορροπίας σε αμιγείς στρατηγικές (παίγνια τύπου IV.β) στα 72 υπό εξέταση παίγνια είναι:

	Πίνακας 4
Αν $\boldsymbol{W_{\alpha\alpha} < W_{\beta\alpha} \Rightarrow W_{\alpha\gamma} > W_{\beta\gamma}}$ **και** αν $\boldsymbol{W_{\alpha\alpha} > W_{\beta\alpha} \Rightarrow W_{\alpha\gamma} < W_{\beta\gamma}}$ Αν $W_{\alpha\beta} < W_{\alpha\delta} \Rightarrow W_{\beta\beta} > W_{\beta\delta}$ και αν $W_{\alpha\beta} > W_{\alpha\delta} \Rightarrow W_{\beta\beta} < W_{\beta\delta}$	<table><tr><td></td><td></td><td colspan="2">**2**</td></tr><tr><td></td><td></td><td>**β A**</td><td>**(1-β) D**</td></tr><tr><td rowspan="2">**1**</td><td>**α P**</td><td>$\mathbf{W_{\alpha\alpha}}$, $\mathbf{W_{\alpha\beta}}$</td><td>$\mathbf{W_{\alpha\gamma}}$, $\mathbf{W_{\alpha\delta}}$</td></tr><tr><td>**(1-α) K**</td><td>$\mathbf{W_{\beta\alpha}}$, $\mathbf{W_{\beta\beta}}$</td><td>$\mathbf{W_{\beta\gamma}}$, $\mathbf{W_{\beta\delta}}$</td></tr></table>

Η προσδοκώμενη προτίμηση για τον **παίκτη 1** είναι:

$$\left.\begin{aligned} U_1^P &= \beta\, W_{\alpha\alpha} + (1-\beta)\, W_{\alpha\gamma} \\ U_1^K &= \beta\, W_{\beta\alpha} + (1-\beta)\, W_{\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{W_{\beta\gamma} - W_{\alpha\gamma}}{W_{\alpha\alpha} - W_{\beta\alpha}} > 0\,, \forall\ W_{\alpha\alpha},\ W_{\beta\alpha},\ W_{\beta\gamma},\ W_{\alpha\gamma} \in [1 \ldots 4]$$

όταν $\lvert W_{\beta\gamma} - W_{\alpha\gamma}\rvert = 3 \Rightarrow \lvert W_{\alpha\alpha} - W_{\beta\alpha}\rvert = 1$, και συνεπώς $\frac{\beta}{1-\beta} = 3$ ή $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$	**3,1 | 1,2** **2,4 | 4,3** **π.χ. Παίγνιο Η-Γ**
όταν $\lvert W_{\beta\gamma} - W_{\alpha\gamma}\rvert = 2 \Rightarrow \lvert W_{\alpha\alpha} - W_{\beta\alpha}\rvert = 2$, και συνεπώς $\frac{\beta}{1-\beta} = 1$ ή $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	**2,3 | 3,2** **4,1 | 1,4** π.χ. Παίγνιο ΣΤ-Η
όταν $\lvert W_{\beta\gamma} - W_{\alpha\gamma}\rvert = 1 \Rightarrow \lvert W_{\alpha\alpha} - W_{\beta\alpha}\rvert = 3$, και συνεπώς $\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{1}{3}$ ή $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$, ή	**4,1 | 2,3** **1,4 | 3,2** π.χ. Παίγνιο Λ-ΣΤ
και όταν $\lvert W_{\beta\gamma} - W_{\alpha\gamma}\rvert = 1 \Rightarrow \lvert W_{\alpha\alpha} - W_{\beta\alpha}\rvert = 1$, και συνεπώς $\frac{\beta}{1-\beta} = 1$ ή $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	**4,1 | 1,3** **3,4 | 2,2** π.χ. Παίγνιο Λ-Β

Η προσδοκώμενη προτίμηση για τον **παίκτη 2** είναι:

$$\left.\begin{aligned} U_2^A &= \alpha\, W_{\alpha\beta} + (1-\alpha)\, W_{\beta\beta} \\ U_2^D &= \alpha\, W_{\alpha\delta} + (1-\alpha)\, W_{\beta\delta} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{W_{\beta\delta} - W_{\beta\beta}}{W_{\alpha\beta} - W_{\alpha\delta}} > 0, \forall\ W_{\alpha\alpha},\ W_{\beta\alpha},\ W_{\beta\gamma},\ W_{\alpha\gamma} \in [1 \ldots 4]$$

<table>
<tr><td>όταν $|W_{\beta\delta} - W_{\beta\beta}| = 3 \Rightarrow\ |W_{\alpha\beta} - W_{\alpha\delta}| = 1$, και συνεπώς $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 3$ ή $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$</td><td><table><tr><td>2,3</td><td>3,2</td></tr><tr><td>4,1</td><td>1,4</td></tr></table>π.χ. Παίγνιο ΣΤ-Η</td></tr>
<tr><td>όταν $|W_{\beta\delta} - W_{\beta\beta}| = 2 \Rightarrow\ |W_{\alpha\beta} - W_{\alpha\delta}| = 2$, και συνεπώς $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1$ ή $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$</td><td><table><tr><td>4,1</td><td>2,3</td></tr><tr><td>1,4</td><td>3,2</td></tr></table>π.χ. Παίγνιο Λ-ΣΤ</td></tr>
<tr><td>όταν $|W_{\beta\delta} - W_{\beta\beta}| = 1 \Rightarrow\ |W_{\alpha\beta} - W_{\alpha\delta}| = 3$, και συνεπώς $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{3}$ ή $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$, ή</td><td><table><tr><td>4,1</td><td>2,4</td></tr><tr><td>1,3</td><td>3,2</td></tr></table>π.χ. Παίγνιο Λ-Ζ</td></tr>
<tr><td>και όταν $|W_{\beta\delta} - W_{\beta\beta}| = 1 \Rightarrow\ |W_{\alpha\beta} - W_{\alpha\delta}| = 1$, και συνεπώς $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1$ ή $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$</td><td><table><tr><td>3,1</td><td>1,2</td></tr><tr><td>2,4</td><td>4,3</td></tr></table>π.χ. Παίγνιο Η-Γ</td></tr>
</table>

Απεικονιστικά:

<table>
<tr><td>
<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>β A</td><td>(1-β) D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>α P</td><td>$W_{\alpha\beta}$
$W_{\alpha\alpha}$</td><td>$W_{\alpha\delta}$
$W_{\alpha\gamma}$</td></tr>
<tr><td>(1-α) K</td><td>$W_{\beta\beta}$
$W_{\beta\alpha}$</td><td>$W_{\beta\delta}$
$W_{\beta\gamma}$</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>β A</td><td>(1-β) D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>α P</td><td>$W_{\alpha\beta}$
$W_{\alpha\alpha}$</td><td>$W_{\alpha\delta}$
$W_{\alpha\gamma}$</td></tr>
<tr><td>(1-α) K</td><td>$W_{\beta\beta}$
$W_{\beta\alpha}$</td><td>$W_{\beta\delta}$
$W_{\beta\gamma}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Εύρεση της πιθανότητας β</td><td>Εύρεση της πιθανότητας α</td></tr>
</table>

Έτσι, για παράδειγμα στο **παίγνιο Η-Γ** του τύπου IV.β,
Επειδή, $|W_{\beta\delta} - W_{\beta\beta}| = |3-4| = 1$ και $|W_{\alpha\beta} - W_{\alpha\delta}| = |1-2| = 1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, και
επειδή, $|W_{\beta\gamma} - W_{\alpha\gamma}| = |4-1| = 3\ και\ |W_{\alpha\alpha} - W_{\beta\alpha}| = |3-2| = 1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

Συνεπώς, για το εν λόγω παίγνιο η βέλτιστη απόκριση του παίκτη 1 είναι: $BR_1 = (\frac{1}{2}P, \frac{1}{2}K)$ και η βέλτιστη απόκριση του παίκτη 2 είναι: $BR_2 = (\frac{3}{4}A, \frac{1}{4}D)$.

Με βάση το προφίλ των στρατηγικών ισορροπίας,
η έκβαση (P, A) με προτιμήσεις (3,1) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha \cdot \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$,
η έκβαση (P, D) με προτιμήσεις (1,2) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha(1-\beta) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$,
η έκβαση (K, A) με προτιμήσεις (2,4) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)\beta = \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$,
η έκβαση (K, D) με προτιμήσεις (4, 3) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)(1-\beta) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$.

Στο σημείο ισορροπίας (NE), η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι: $\boldsymbol{U_1} = \frac{3}{8}\,3 + \frac{1}{8}\,1 + \frac{3}{8}\,2 + \frac{1}{8}\,4 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ και του παίκτη 2: $\boldsymbol{U_2} = \frac{3}{8}\,1 + \frac{1}{8}\,2 + \frac{3}{8}\,4 + \frac{1}{8}\,3 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$.

Συνεπώς, οι αποδόσεις των παικτών στο προφίλ ισορροπίας θα είναι $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ή, ομοίως $(\mathbf{2.5}, \mathbf{2.5})$.

Ομοίως, στο παίγνιο Λ-ΣΤ,

4,1	**2**,3
1,4	**3**,2

Παίγνιο Λ-ΣΤ

επειδή |2-4|=2 και |1-3|=2 $\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ και

επειδή |3-2|=1 και |4-1|=3 $\Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

Με βάση το προφίλ των στρατηγικών ισορροπίας,
η έκβαση (P, A) με προτιμήσεις (4,1) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha \cdot \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$,
η έκβαση (P, D) με προτιμήσεις (2,3) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha(1-\beta) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$,
η έκβαση (K, A) με προτιμήσεις (1,4) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)\beta = \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$,
η έκβαση (K, D) με προτιμήσεις (3, 2) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)(1-\beta) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$.

Στο σημείο ισορροπίας (NE), η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι: $\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{8}\,4 + \frac{3}{8}\,2 + \frac{1}{8}\,1 + \frac{3}{8}\,3 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ και του παίκτη 2: $\boldsymbol{U_2} = \frac{1}{8}\,1 + \frac{3}{8}\,3 + \frac{1}{8}\,4 + \frac{3}{8}\,2 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$.
Συνεπώς, οι αποδόσεις των παικτών στο προφίλ ισορροπίας θα είναι $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ή, ομοίως $(\mathbf{2.5}, \mathbf{2.5})$.

Συνοπτικά, στο παίγνιο G η πιθανοτική κατανομή των διαθέσιμων στρατηγικών του **παίκτη 1** θα παίρνει τιμές:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

και του **παίκτη 2**:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \text{ ή } \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \text{ ή } \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

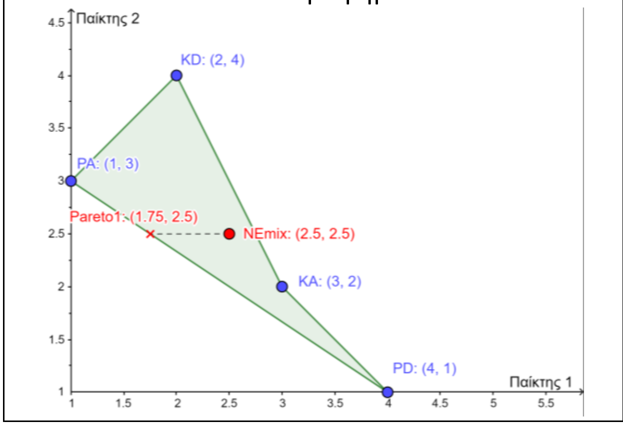
Οι προτιμήσεις των παικτών στο προφίλ ισορροπίας Nash και για τα 72 υπό εξέταση παίγνια θα είναι το σημείο (2.5 , 2.5).

Το ερώτημα που τίθεται είναι εάν υπάρχει δυνατότητα οι εμπλεκόμενοι παίκτες να αποκλίνουν της ισορροπίας Nash (NE) και να μεταβάλλουν την πιθανοτική κατανομή των επιλεγόμενων στρατηγικών τους που τους οδηγούν στην NE, με τρόπο ώστε να επιτύχουν βελτιστοποίηση κατά Pareto στις προσδοκώμενες προτιμήσεις τους. Δηλ. εάν μπορούν να αναμίξουν τις στρατηγικές τους έτσι ώστε η ισορροπία που θα καταλήξουν να μετατοπιστεί με βέλτιστο κατά Pareto τρόπο και για τους δύο παίκτες. Μια **αισθητή** και **ευσταθής** βελτιστοποίηση κατά Pareto θα αποτελούσε μια μετατόπιση της ισορροπίας από το διάστημα (2…3) δηλ. [καλή… κακή] στο διάστημα (1…2) δηλ. [πολύ καλή … καλή] και με τρόπο ώστε κανείς από τους δύο παίκτες να μην έχει συμφέρον να τροποποιήσει τη μικτή στρατηγική που τον οδήγησε στην έκβαση αυτή με δεδομένη την μικτή στρατηγική του άλλου παίκτη.

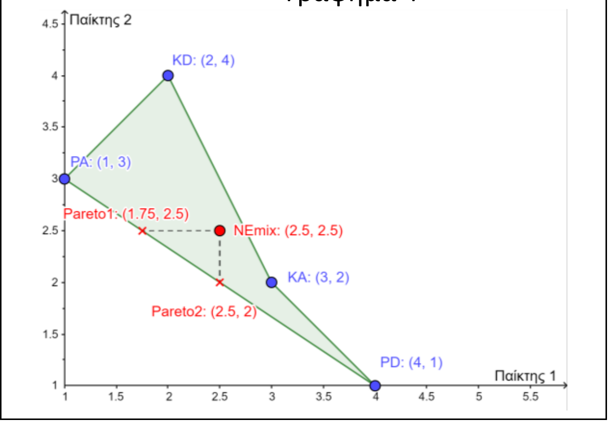
Για να ελέγξουμε το ανωτέρω ερώτημα, θα συνεχίσουμε με την ανάλυση του παιγνίου Γ-Γ τύπου IV.β (Πίνακας 2). Στο Γράφημα 3 που ακολουθεί, παρατηρούμε ότι το σημείο **Pareto 1** αποτελεί μια βελτιστοποίηση κατά Pareto της ισορροπίας Nash, καθώς βελτιώνει την προσδοκώμενη προτίμηση του παίκτη 1 (από 2.5 σε 1.75) χωρίς να μεταβάλλεται η προσδοκώμενη προτίμηση του παίκτη 2 σε σχέση με το σημείο ισορροπίας Nash. Το σημείο Pareto 1 αποτελεί μια οριζόντια προβολή του σημείου NE που τέμνει την πλευρά PA PD του πολυγώνου των στρατηγικών προφίλ του παιγνίου.

Αντίστοιχα, στο Γράφημα 4, παρατηρούμε ότι το σημείο **Pareto 2** αποτελεί μια βελτιστοποίηση κατά Pareto της ισορροπίας Nash, καθώς βελτιώνει την προσδοκώμενη προτίμηση του παίκτη 2 (από 2.5 σε 2) χωρίς να μεταβάλλεται η προσδοκώμενη προτίμηση του παίκτη 1 σε σχέση με το σημείο ισορροπίας Nash. Το σημείο Pareto 2 αποτελεί μια κάθετη προβολή του σημείου NE που τέμνει την πλευρά PA PD του πολυγώνου των στρατηγικών προφίλ του παιγνίου.

Γράφημα 3

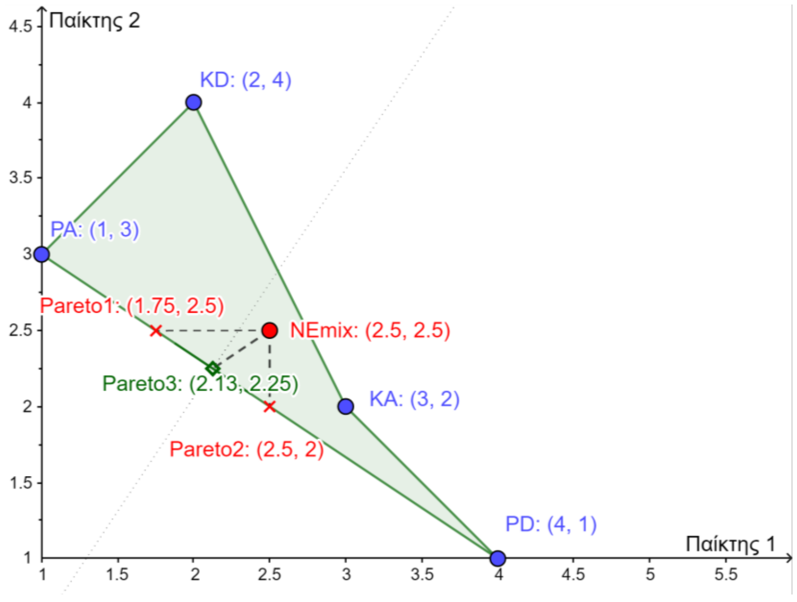


Γράφημα 4



Στο Γράφημα 5, παρατηρούμε ότι το σημείο **Pareto 3** αποτελεί μια αμοιβαία βελτιστοποίηση κατά Pareto της ισορροπίας Nash, καθώς βελτιώνει τόσο την προσδοκώμενη προτίμηση του παίκτη 1 (από 2.5 σε 2.13) όσο και την προσδοκώμενη προτίμηση του παίκτη 2 (από 2.5 σε 2.25) σε σχέση με το σημείο ισορροπίας Nash. Το σημείο Pareto 3 βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από τα σημεία Pareto 1 και Pareto 2 επί της πλευράς PA PD του πολυγώνου των στρατηγικών προφίλ του παιγνίου.

Γράφημα 5



Σημειώνεται ότι:
η έκβαση (P, A) με προτιμήσεις (1,3) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha' \cdot \beta'$,

η έκβαση (P, D) με προτιμήσεις (4,1) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha'(1-\beta')$,
η έκβαση (K, A) με προτιμήσεις (3,2) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha')\beta'$,
η έκβαση (K, D) με προτιμήσεις (2, 4) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha')(1-\beta')$.

Εξετάζω τη δυνατότητα βελτιστοποίησης Pareto3
Το σημείο Pareto 3 έχει συντεταγμένες (2.13, 2.25) και η προσδοκώμενη προτίμηση για τον παίκτη 1 δίνεται από τον τύπο:
$\boldsymbol{U_1}: \alpha'\beta' \cdot 1 + \alpha'(1-\beta') \cdot 4 + (1-\alpha')\beta' \cdot 3 + (1-\alpha')(1-\beta') \cdot 2 = \mathbf{2.13}$ ή

$$\boldsymbol{2\alpha' - 3\beta' + 2 = 2.13} \quad \textbf{(1.1.)}$$

$$\text{ή} \quad 2\alpha' - 3\beta' = 0{,}13 \quad (1.2)$$

Η προσδοκώμενη προτίμηση για τον παίκτη 2 δίνεται από τον τύπο:
$\boldsymbol{U_2}: \alpha'\beta' \cdot 3 + \alpha'(1-\beta') \cdot 1 + (1-\alpha')\beta' \cdot 2 + (1-\alpha')(1-\beta') \cdot 4 = \mathbf{2.25}$ ή

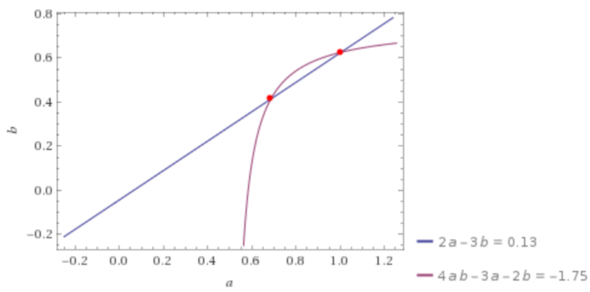
$$\boldsymbol{4\,\alpha'\beta' - 3\alpha' - 2\beta' + 4 = 2.25} \quad \textbf{(1.3.)}$$

$$\text{ή} \quad 4\,\alpha'\beta' - 3\alpha' - 2\beta' = -1{,}75 \quad (1.4)$$

Η επίλυση των 1.2 και 1.4. μας δίνει δύο λύσεις:

$\boldsymbol{\alpha' = 1,00398 \quad \kappa\alpha\iota\ \beta' = 0,62598,}$
η οποία απορρίπτεται επειδή
$\boldsymbol{\alpha' \in [0,1]}$

και
$\boldsymbol{\alpha' = 0,68602}$ **και** $\boldsymbol{\beta' = 0,41401}$
ή, περίπου, $\alpha' = \frac{2}{3}$ και $\beta' = \frac{2}{5}$.



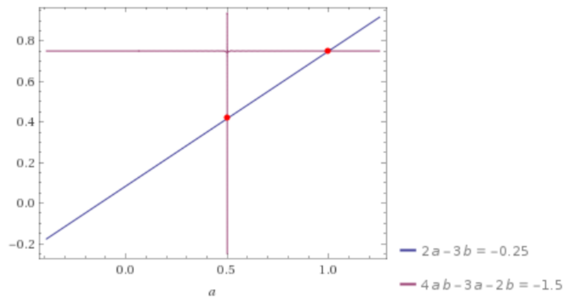
Η βελτιστοποίηση κατά **Pareto3** επιτυγχάνεται όταν ο παίκτης 1 επιλέγει τη στρατηγική $x_1 = \left(\frac{2}{3}P, \frac{1}{3}K\right)$ και ο παίκτης 2 τη στρατηγική $x_2 = \left(\frac{2}{5}A, \frac{3}{5}D\right)$ αντί των στρατηγικών $x_1 = \left(\frac{1}{2}P, \frac{1}{2}K\right)$ και $x_2 = \left(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}D\right)$ που τους οδηγούν στη NE.

Συνεπώς, επιλέγοντας ο παίκτης 1 τη στρατηγική P με συχνότητα: $\boldsymbol{\alpha = \frac{2}{3}}$ (δηλ. $\alpha \neq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \neq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \neq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$, που δηλώνουν επιδίωξη NE) κάνει ένα σινιάλο στο παίκτη 2 ότι προτίθεται να παίξει την Pareto3 ισορροπία την οποία μπορούν από κοινού να επιτύχουν αν και εκείνος (ο παίκτης 2) επιλέγει την στρατηγική A με συχνότητα: $\boldsymbol{\beta = \frac{2}{5}}$ (δηλ. $\beta \neq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \neq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \neq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$, που οδηγούν το παίγνιο σε NE). Το επιχείρημα ισχύει και αντιστρόφως: Ο παίκτης 2 μπορεί να κάνει σινιάλο στον παίκτη 1 ότι επιδιώκει την Pareto3 ισορροπία εάν επιλέγει την στρατηγική A με συχνότητα: $\boldsymbol{\beta = \frac{2}{5}}$**.**

Εξετάζω τη δυνατότητα βελτιστοποίησης κατά Pareto1.
Οι συντεταγμένες του σημείου Pareto 1 είναι (1.75 , 2.5) και συνεπώς από τις σχέσεις (1.1) και (1.3) έχουμε:
$\overset{(1.1)}{\Longrightarrow}$ $2\alpha' - 3\beta' + 2 = \mathbf{1.75}$ ή $2\alpha' - 3\beta' = -0.25$ (1.5)
$\overset{(1.3)}{\Longrightarrow}$ $4\,\alpha'\beta' - 3\alpha' - 2\beta' + 4 = \mathbf{2.50}$ ή $4\,\alpha'\beta' - 3\alpha' - 2\beta' = -1.50$ (1.6)

Η επίλυση των 1.5 και 1.6. μας δίνει δύο λύσεις:

$\boldsymbol{\alpha' = \frac{1}{2}}$ ***και*** $\boldsymbol{\beta' = \frac{5}{12}}$,
και
$\boldsymbol{\alpha' = 1}$ **και** $\boldsymbol{\beta' = \frac{3}{4}}$



Η βελτιστοποίηση κατά **Pareto1** επιτυγχάνεται όταν ο παίκτης 1 επιλέγει σταθερά (δηλ. με α=1) την στρατηγική P και όταν ο παίκτης 2 επιλέγει με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ τη στρατηγική A και με $\frac{1}{4}$ την στρατηγική D. Δηλ. $\boldsymbol{Pareto1} = \{\boldsymbol{P}\ , \left(\boldsymbol{\frac{3}{4}A, \frac{1}{4}D}\right)\}$. Όμως, με δεδομένο ότι ο 1 παίζει μόνο P, ο παίκτης 2 έχει κίνητρο να παίζει μόνο D που οδηγεί στο σημείο (4,1) με προφανές όφελος για αυτόν. Συνεπώς η Pareto 1 με το συγκεκριμένο προφίλ στρατηγικών δεν είναι εκλογικευμένη.

Η Pareto 1 μπορεί επίσης να επιτευχθεί εάν ο παίκτης 1 παίζει τη στρατηγική της ισορροπίας Nash: $x_1 = \left(\frac{1}{2}P\ , \frac{1}{2}\ K\right)$ και ο παίκτης 2 τη στρατηγική $x_2 = \left(\frac{5}{12}A\ , \frac{7}{12}\ D\right)$. Δηλ. $\boldsymbol{Pareto1} = \{\ \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}P\ , \frac{1}{2}\ K}\right)$, $\left(\boldsymbol{\frac{5}{12}A\ , \frac{7}{12}\ D}\right)\}$.

Στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει ευκρινές σινιάλο που να αποτελεί για τον αποδέκτη του σινιάλου κίνητρο να μεταβάλει τη στρατηγική του που τον οδηγεί στη NE. Έτσι, καθώς η Pareto1 βελτιώνει την προσδοκώμενη προτίμηση του παίκτη 1, ο παίκτης 2 δεν κερδίζει (αλλά και δεν χάνει) κάτι περισσότερο από αυτό που κερδίζει στη NE. Ένας αλτρουιστής παίκτης 2, με δεδομένο ότι ο αντίπαλός του παίζει τη στρατηγική NE, μπορεί αντί να παίζει την δική του στρατηγική ισορροπίας : $x_2(\frac{1}{2}P\ , \frac{1}{2}\ K)$ που τους οδηγεί σε αναμενόμενες αποδόσεις (2.5 , 2.5) , να παίξει την $x_2 = \left(\frac{5}{12}A\ , \frac{7}{12}\ D\right)$ που θα τους οδηγήσει σε αναμενόμενες αποδόσεις: (1.75 , 2.5).

Εξετάζω τη δυνατότητα βελτιστοποίησης κατά Pareto2.

Οι συντεταγμένες του σημείου Pareto2 είναι (2.5 , 2) και συνεπώς οι σχέσεις (1.1) και (1.3) έχουν ως εξής:

$\overset{(1.1)}{\Longrightarrow}\ 2\alpha' - 3\beta' + 2 = \mathbf{2.5}$ ή $2\alpha' - 3\beta' = -0.5$ (1.7)

$\overset{(1.3)}{\Longrightarrow}\ 4\,\alpha'\,\beta' - 3\alpha' - 2\beta' + 4 = \mathbf{2}$ ή $4\,\alpha'\beta' - 3\alpha' - 2\beta' = -2$ (1.8)

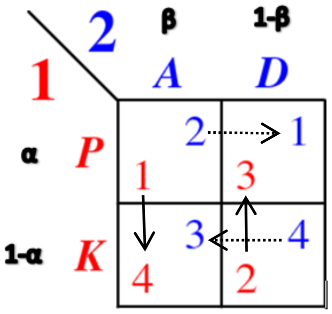
Η επίλυση των 1.7 και 1.8 δεν μας δίνει λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς.

Συμπέρασμα: Με δεδομένο ότι η Pareto 1 και Pareto 2 ισορροπίες είτε δεν είναι εκλογικευμένες είτε προϋποθέτουν παίκτες με αλτρουιστική συμπεριφορά (χαρακτηριστικό που δεν επιδέχεται γενίκευσης), είτε δεν δίνουν πραγματικές πιθανοτικές κατανομές στρατηγικών, ο κάθε παίκτης είναι σε θέση να επιλέξει την Pareto 3 πιθανοτική κατανομή μεταξύ των διαθέσιμων εναλλακτικών του (η οποία είναι διαφορετική της πιθανοτικής κατανομής που οδηγεί στη NE) κάνοντας με τον τρόπο αυτό ένα αξιόπιστο σινιάλο προς τον άλλον παίκτη για την πραγματική του επιδίωξη (να παίξουν την Pareto 3 ισορροπία), προτρέποντάς τον έτσι να παίξει και εκείνος την δική του μικτή στρατηγική Pareto 3 που θα τους οδηγήσει από κοινού σε καλύτερες εκβάσεις από εκείνες στις οποίες καταλήγουν παίζοντας τις μικτές στρατηγικές που τους οδηγούν στην NE.

2ο Παράδειγμα

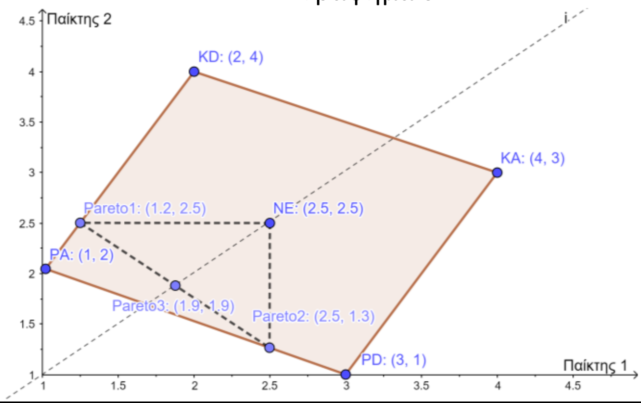
Λαμβάνουμε το παίγνιο Α-Ι (του τύπου IV.β) –χωρίς κυρίαρχες στρατηγικές και χωρίς NE σε αμιγείς- (Πίνακας 5).

Πίνακας 5



Παίγνιο Α-Ι τύπου IV.β

Γράφημα 6



Εκβάσεις του παιγνίου Α-Ι στο καρτεσιανό επίπεδο.

Σύμφωνα με την τεχνική που αναπτύξαμε για την εύρεση της πιθανοτικής κατανομής στο NE:

Επειδή, |2-3|=1 και |1-4|=3 ⇒ $\boldsymbol{\beta = \frac{1}{4}}$ και επειδή, |4-3|=1 και |2-1|=1 ⇒ $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2}}$

Έτσι, το σημείο ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές επιτυγχάνεται με $\alpha = \frac{1}{2}$ *και* $\beta = \frac{1}{4}$ και συνεπώς το στρατηγικό προφίλ ισορροπίας είναι:

$$\boldsymbol{NE = \{(\tfrac{1}{2}P, \tfrac{1}{2}K), (\tfrac{1}{4}A, \tfrac{3}{4}D)\}}$$

Οι προσδοκώμενες προτιμήσεις των παικτών στο NE, όπως και προηγουμένως, προσδιορίζονται ως εξής:

η έκβαση (P, A) με προτιμήσεις (1,2) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha \cdot \beta = \frac{1}{8}$,

η έκβαση (P, D) με προτιμήσεις (3,1) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = \alpha\,(1-\beta) = \frac{3}{8}$,

η έκβαση (K, A) με προτιμήσεις (4,3) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)\beta = \frac{1}{8}$,

η έκβαση (K, D) με προτιμήσεις (2, 4) θα επέλθει με πιθανότητα $\pi = (1-\alpha)(1-\beta) = \frac{3}{8}$.

Στο σημείο ισορροπίας (NE), η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι: $\boldsymbol{U_1} = \frac{1}{8}\,1 + \frac{3}{8}\,3 + \frac{1}{8}\,4 + \frac{3}{8}\,2 = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$ και του παίκτη 2: $\boldsymbol{U_2} = \frac{1}{8}\,2 + \frac{3}{8}\,1 + \frac{1}{8}\,3 + \frac{3}{8}\,4 = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$.

Συνεπώς, όπως έχει ήδη παρατηρηθεί, οι αποδόσεις των παικτών στο προφίλ ισορροπίας θα είναι $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ή, ομοίως $(2.5\,, 2.5)$.

Με δεδομένο ότι οι Pareto 1 και 2 ισορροπίες είτε δεν είναι εκλογικευμένες είτε προϋποθέτουν παίκτες με αλτρουιστική συμπεριφορά (χαρακτηριστικό που δεν επιδέχεται γενίκευσης), είτε δεν δίνουν πραγματικές πιθανοτικές κατανομές στρατηγικών, εξετάζεται η δυνατότητα βελτιστοποίησης κατά Pareto 3.

Δυνατότητα βελτιστοποίησης Pareto3, παίγνιο Α-Ι, τύπου IV.β.

Το σημείο Pareto 3 έχει συντεταγμένες (1.9 , 1.9). Έτσι, η προσδοκώμενη προτίμηση για τον παίκτη 1 δίνεται από τον τύπο:

$\boldsymbol{U_1}: \alpha\, \beta \cdot 1 + \alpha\,(1-\beta) \cdot 3 + (1-\alpha)\beta \cdot 4 + (1-\alpha)(1-\beta) \cdot 2 = \mathbf{1.9}$ ή

$$\boldsymbol{-4\alpha\beta + \alpha + 2\beta + 2 = 1.9} \quad \textbf{(2.1.)}$$

$$\text{ή } -4\alpha\beta + \alpha + 2\beta = -0.1 \quad (2.2)$$

Η προσδοκώμενη προτίμηση για τον παίκτη 2 δίνεται από τον τύπο:

$\boldsymbol{U_2}: \alpha\, \beta \cdot 2 + \alpha\,(1-\beta) \cdot 1 + (1-\alpha)\beta \cdot 3 + (1-\alpha)(1-\beta) \cdot 4 = \mathbf{1.9}$ ή

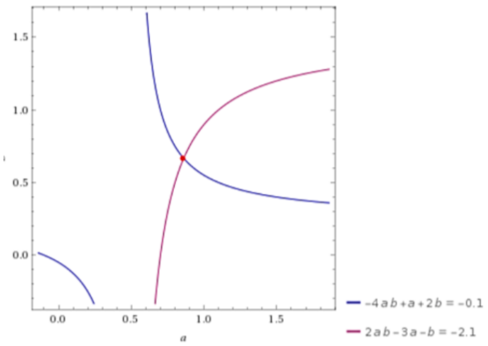
$$\boldsymbol{2\alpha\beta - 3\alpha - \beta + 4 = 1.9} \quad \textbf{(2.3.)}$$

$$\text{ή } 2\alpha\beta - 3\alpha - \beta = -2.1 \quad (2.4)$$

Η επίλυση των 2.2 και 2.4. μας δίνει λύση:

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0,86}$ (ή, $ομοίως\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{43}}{\mathbf{50}}$) και

$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0,66}$ (ή, $ομοίως\ \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$)



Συνεπώς, αν οι παίκτες παρεκκλίνουν της ισορροπίας Nash, $\boldsymbol{NE} = \{(\frac{1}{2}\boldsymbol{P}, \frac{1}{2}\boldsymbol{K}), (\frac{1}{4}\boldsymbol{A}, \frac{3}{4}\boldsymbol{D})\}$ και παίξουν τις στρατηγικές $\boldsymbol{Pareto3} = \left\{\left(\frac{43}{50}P, \frac{7}{50}K\right), \left(\frac{2}{3}A, \frac{1}{3}D\right)\right\}$ θα βελτιώσουν την προσδοκώμενη προτίμηση έκβασης από (2.5 , 2.5) σε (1.9 , 1.9).

Βιβλιογραφία – Αρθρογραφία

Σταματόπουλος Γ. (2015), Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα, ΣΕΑΒ

Savani, R., and **B. von Stengel (2015)**, "Game Theory Explorer – Software for the Applied Game Theorist" Computational Management Science *12, 5-33*.

Watson J. (2013), Strategy, WW Norton and Company, 3th edit.

Myerson R. (2009), "Learning From Schelling's Strategy of Conflict", prepared for a conference at the University of Maryland in honor of Thomas C. Schelling, Sept 29, 2006. Latest revision: April 2009.

Myerson R. (1999), "Nash Equilibrium and the History of Economic Theory", Journal of Economic Literature, Vol. 37, No. 3 (Sep., 1999), pp. 1067-1082.

Battigalli P. (1991), Game Theory – Analysis of Strategic Thinking, Bocconi University, Milan.

Nash, Jr., John F. (1951), "Noncooperative games" Annals Math., 54, pp. 289-95. Παρατίθεται σε ελληνική μετάφραση στο **Κοτταρίδη Κ. – Σιουρούνης Γρ.** Αφιέρωμα στον John Nash -Θεωρία Παιγνίων, εκδ. Ευρασία, Αθήνα 2002. σελ. 209-223.

Nash, Jr., John F. (1950b), "Equilibrium Points in n-Person Games," Proceedings Nat. Academy Sciences USA, 36, pp. 48-49. Παρατίθεται σε ελληνική μετάφραση στο Κοτταρίδη Κ. – Σιουρούνης Γρ. (2002), σελ. 207-8.

Η παραγωγή των παιγνίων της μήτρας έγιναν με κώδικα σε VBA (ο κώδικας γράφτηκε από τον *Δημήτριο Σώχο*), τα σχήματα έγιναν με το ελεύθερο λογισμικό ***GeoGebra***, οι πίνακες των παιγνίων των παραδειγμάτων έγιναν με το ελεύθερο λογισμικό ***Game Theory Explorer β*** και η επίλυση των συστημάτων των μη γραμμικών εξισώσεων έγιναν στο https://www.wolframalpha.com.

Παράρτημα.

Παίγνια τύπου Ι, ΙΙ, ΙΙΙ και IV που παράγονται από την μήτρα του Πίνακα 1.

(α) Παίγνια τύπου Ι. *(ο παίκτης γραμμής έχει κυρίαρχη στρατηγική και το κάθε παίγνιο έχει μία αμιγή ΝΕ)*

	Α		Β		Γ		Δ		Ε		ΣΤ		Ζ		Η		Θ		Ι	
Α	**1,1**	2,2	**1,1**	2,2	**1,1**	2,3	**1,1**	2,3	**1,1**	2,4	**1,1**	2,4	**1,1**	3,2	**1,1**	3,3	**1,1**	3,4	1,2	**2,1**
	3,4	4,3	4,4	3,3	3,4	4,2	4,4	3,2	3,3	4,2	4,3	3,2	2,4	4,3	2,4	4,2	2,3	4,2	3,3	4,4
Β	1,2	**2,1**	**1,2**	2,3	**1,2**	2,3	**1,2**	2,4	**1,2**	2,4	1,2	**3,1**	**1,2**	3,3	**1,2**	3,4	1,3	**2,1**	1,3	**2,1**
	4,3	3,4	3,4	4,1	4,4	3,1	3,3	4,1	4,3	3,1	2,3	4,4	2,4	4,1	2,3	4,1	3,2	4,4	4,2	3,4
Γ	1,3	**2,2**	1,3	**2,2**	**1,3**	2,4	**1,3**	2,4	1,3	**3,1**	1,3	**3,2**	**1,3**	3,4	1,4	**2,1**	1,4	**2,1**	1,4	**2,2**
	3,1	4,4	4,1	3,4	3,2	4,1	4,2	3,1	2,2	4,4	2,1	4,4	2,2	4,1	3,2	4,3	4,2	3,3	3,1	4,3
Δ	1,4	**2,2**	1,4	**2,3**	1,4	**2,3**	1,4	**3,1**	1,4	**3,2**	1,4	**3,3**	**2,1**	1,2	**2,1**	1,2	**2,1**	1,3	**2,1**	1,3
	4,1	3,3	3,1	4,2	4,1	3,2	2,2	4,3	2,1	4,3	2,1	4,2	3,4	4,3	4,4	3,3	3,4	4,2	4,4	3,2
Ε	**2,1**	1,4	**2,1**	1,4	2,1	4,2	2,1	4,3	2,1	4,4	2,2	**1,1**	2,2	**1,1**	**2,2**	1,3	**2,2**	1,3	**2,2**	1,4
	3,3	4,2	4,3	3,2	1,4	**3,3**	1,4	**3,2**	1,3	**3,2**	3,3	4,4	4,3	3,4	3,4	4,1	4,4	3,1	3,3	4,1
ΣΤ	**2,2**	1,4	2,2	4,1	2,2	4,3	2,2	4,4	2,3	**1,1**	2,3	**1,1**	2,3	**1,2**	2,3	**1,2**	**2,3**	1,4	**2,3**	1,4
	4,3	3,1	**1,3**	3,4	1,4	**3,1**	1,3	**3,1**	3,2	4,4	4,2	3,4	3,1	4,4	4,1	3,4	3,2	4,1	4,2	3,1
Ζ	2,3	4,1	2,3	4,2	2,3	4,4	2,4	**1,1**	2,4	**1,1**	2,4	**1,2**	2,4	**1,2**	2,4	**1,3**	2,4	**1,3**	2,4	4,1
	1,2	3,4	**1,1**	3,4	1,2	**3,1**	3,2	4,3	4,2	3,3	3,1	4,3	4,1	3,3	3,1	4,2	4,1	3,2	**1,2**	3,3
Η	2,4	4,2	2,4	4,3	**3,1**	1,2	**3,1**	1,3	**3,1**	1,4	3,1	4,2	3,1	4,2	3,1	4,3	3,1	4,3	3,1	4,4
	1,1	3,3	**1,1**	3,2	4,4	2,3	4,4	2,2	4,3	2,2	1,4	**2,3**	2,4	**1,3**	1,4	**2,2**	2,4	**1,2**	1,3	**2,2**
Θ	3,1	4,4	3,2	**1,1**	**3,2**	1,3	**3,2**	1,4	3,2	4,1	3,2	4,1	3,2	4,3	3,2	4,3	3,2	4,4	3,2	4,4
	2,3	**1,2**	4,3	2,4	4,4	2,1	4,3	2,1	**1,3**	2,4	**2,3**	1,4	1,4	**2,1**	2,4	**1,1**	1,3	**2,1**	2,3	**1,1**
Ι	3,3	**1,1**	3,3	**1,2**	**3,3**	1,4	3,3	4,1	3,3	4,1	3,3	4,2	3,3	4,2	3,3	4,4	3,3	4,4	3,4	**1,1**
	4,2	2,4	4,1	2,4	4,2	2,1	**1,2**	2,4	**2,2**	1,4	**1,1**	2,4	**2,1**	1,4	1,2	**2,1**	2,2	**1,1**	4,2	2,3
Κ	3,4	**1,2**	3,4	**1,3**	3,4	4,1	3,4	4,1	3,4	4,2	3,4	4,2	3,4	4,3	3,4	4,3	4,1	2,2	4,1	2,3
	4,1	2,3	4,1	2,2	**1,2**	2,3	**2,2**	1,3	**1,1**	2,3	**2,1**	1,3	**1,1**	2,2	**2,1**	1,2	3,4	**1,3**	3,4	**1,2**
Λ	4,1	2,4	4,1	3,2	4,1	3,2	4,1	3,3	4,1	3,3	4,1	3,4	4,1	3,4	4,2	2,1	4,2	2,3	4,2	2,4
	3,3	**1,2**	1,4	**2,3**	2,4	**1,3**	1,4	**2,2**	2,4	**1,2**	1,3	**2,2**	2,3	**1,2**	**3,3**	1,4	3,4	**1,1**	3,3	**1,1**
Μ	4,2	3,1	4,2	3,1	4,2	3,3	4,2	3,3	4,2	3,4	4,2	3,4	4,3	2,1	4,3	2,2	4,3	2,4	4,3	3,1
	1,3	2,4	**2,3**	1,4	1,4	**2,1**	2,4	**1,1**	1,3	**2,1**	2,3	**1,1**	**3,2**	1,4	**3,1**	1,4	3,2	**1,1**	**1,2**	2,4
Ν	4,3	3,1	4,3	3,2	4,3	3,2	4,3	3,4	4,3	3,4	4,4	2,1	4,4	2,2	4,4	2,3	4,4	3,1	4,4	3,1
	2,2	1,4	**1,1**	2,4	**2,1**	1,4	1,2	**2,1**	2,2	**1,1**	**3,2**	1,3	**3,1**	1,3	**3,1**	1,2	**1,2**	2,3	**2,2**	1,3
Ξ	4,4	3,2	4,4	3,2	4,4	3,3	4,4	3,3												
	1,1	2,3	**2,1**	1,3	**1,1**	2,2	**2,1**	1,2												

Γραμμοσκίαση: Οι ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές (β) Παίγνια τύπου ΙΙ. *(ο παίκτης στήλης έχει κυρίαρχη στρατηγική και το κάθε παίγνιο έχει μία αμιγή ΝΕ)*

	Α		Β		Γ		Δ		Ε		ΣΤ		Ζ		Η		Θ		Ι	
Α	**1,1**	3,2	**1,1**	3,3	**1,1**	3,4	**1,1**	4,2	**1,1**	4,2	**1,1**	4,3	**1,1**	4,3	**1,1**	4,4	**1,1**	4,4	1,2	3,1
	4,3	2,4	4,2	2,4	4,2	2,3	2,3	3,4	3,3	2,4	2,2	3,4	3,2	2,4	2,2	3,3	3,2	2,3	4,4	**2,3**
Β	**1,2**	3,3	**1,2**	3,4	1,2	4,1	1,2	4,1	**1,2**	4,3	**1,2**	4,3	**1,2**	4,4	**1,2**	4,4	1,3	3,1	1,3	3,2
	4,1	2,4	4,1	2,3	2,4	**3,3**	3,4	**2,3**	2,1	3,4	3,1	2,4	2,1	3,3	3,1	2,3	4,4	**2,2**	4,4	**2,1**
Γ	**1,3**	3,4	1,3	4,1	1,3	4,1	1,3	4,2	1,3	4,2	**1,3**	4,4	**1,3**	4,4	1,4	3,1	1,4	3,2	1,4	3,3
	4,1	2,2	2,4	**3,2**	3,4	**2,2**	2,4	**3,1**	3,4	**2,1**	2,1	3,2	3,1	2,2	4,3	**2,2**	4,3	**2,1**	4,2	**2,1**
Δ	1,4	4,1	1,4	4,1	1,4	4,2	1,4	4,2	1,4	4,3	1,4	4,3	2,1	3,2	**2,1**	3,2	2,1	3,3	**2,1**	3,3
	2,3	**3,2**	3,3	**2,2**	2,3	**3,1**	3,3	**2,1**	2,2	**3,1**	3,2	**2,1**	**1,3**	4,4	4,3	1,4	**1,2**	4,4	4,2	1,4
Ε	2,1	3,4	**2,1**	3,4	**2,1**	4,2	**2,1**	4,3	**2,1**	4,4	2,2	**3,1**	2,2	3,1	2,2	3,3	**2,2**	3,3	2,2	3,4
	1,2	4,3	4,2	1,3	3,3	1,4	3,2	1,4	3,2	1,3	1,4	4,3	4,4	**1,3**	**1,1**	4,4	4,1	1,4	**1,1**	4,3
ΣΤ	**2,2**	3,4	2,2	4,1	**2,2**	4,3	**2,2**	4,4	2,3	**3,1**	2,3	3,1	2,3	**3,2**	2,3	3,2	2,3	3,4	**2,3**	3,4
	4,1	1,3	3,4	**1,3**	3,1	1,4	3,1	1,3	1,4	4,2	4,4	**1,2**	1,4	4,1	4,4	**1,1**	**1,1**	4,2	4,1	1,2
Ζ	2,3	4,1	2,3	4,2	**2,3**	4,4	2,4	**3,1**	2,4	3,1	2,4	**3,2**	2,4	3,2	2,4	**3,3**	2,4	3,3	2,4	4,1
	3,4	**1,2**	3,4	**1,1**	3,1	1,2	1,3	4,2	4,3	**1,2**	1,3	4,1	4,3	**1,1**	1,2	4,1	4,2	**1,1**	3,3	**1,2**
Η	2,4	4,2	2,4	4,3	3,1	1,2	3,1	1,3	3,1	1,4	3,1	2,2	**3,1**	2,2	3,1	2,3	**3,1**	2,3	3,1	2,4
	3,3	**1,1**	3,2	**1,1**	**2,3**	4,4	**2,2**	4,4	**2,2**	4,3	**1,3**	4,4	4,3	1,4	**1,2**	4,4	4,2	1,4	**1,2**	4,3
Θ	**3,1**	2,4	3,2	**1,1**	3,2	1,3	3,2	1,4	3,2	**2,1**	3,2	2,1	3,2	2,3	**3,2**	2,3	3,2	2,4	**3,2**	2,4
	4,2	1,3	2,4	4,3	**2,1**	4,4	**2,1**	4,3	1,4	4,3	4,4	**1,3**	**1,1**	4,4	4,1	1,4	**1,1**	4,3	4,1	1,3
Ι	3,3	**1,1**	3,3	**1,2**	3,3	1,4	3,3	**2,1**	3,3	2,1	3,3	**2,2**	3,3	2,2	3,3	2,4	**3,3**	2,4	3,4	**1,1**
	2,4	4,2	2,4	4,1	**2,1**	4,2	1,4	4,2	4,4	**1,2**	1,4	4,1	4,4	**1,1**	**1,1**	4,2	4,1	1,2	2,3	4,2
Κ	3,4	**1,2**	3,4	**1,3**	3,4	**2,1**	3,4	2,1	3,4	**2,2**	3,4	2,2	3,4	**2,3**	3,4	2,3	4,1	1,2	4,1	1,2
	2,3	4,1	2,2	4,1	1,3	4,2	4,3	**1,2**	1,3	4,1	4,3	**1,1**	1,2	4,1	4,2	**1,1**	**2,3**	3,4	**3,3**	2,4
Λ	4,1	1,3	4,1	1,3	4,1	1,4	4,1	1,4	4,1	2,2	4,1	2,3	4,1	2,4	4,2	**1,1**	4,2	**1,1**	4,2	1,3
	2,2	3,4	**3,2**	2,4	**2,2**	3,3	**3,2**	2,3	**1,3**	3,4	**1,2**	3,4	**1,2**	3,3	2,4	3,3	3,4	2,3	**2,1**	3,4
Μ	4,2	1,3	4,2	1,4	4,2	1,4	4,2	**2,1**	4,2	2,3	4,2	2,4	4,3	**1,1**	4,3	**1,1**	4,3	**1,2**	4,3	**1,2**
	3,1	2,4	**2,1**	3,3	**3,1**	2,3	1,4	3,3	**1,1**	3,4	**1,1**	3,3	2,4	3,2	3,4	2,2	2,4	3,1	3,4	2,1
Ν	4,3	1,4	4,3	1,4	4,3	**2,1**	4,3	**2,2**	4,3	2,4	4,4	**1,1**	4,4	**1,1**	4,4	**1,2**	4,4	**1,2**	4,4	**1,3**
	2,1	3,2	**3,1**	2,2	1,4	3,2	1,4	3,1	**1,1**	3,2	2,3	3,2	3,3	2,2	2,3	3,1	3,3	2,1	2,2	3,1
Ξ	4,4	**1,3**	4,4	**2,1**	4,4	**2,2**	4,4	**2,3**												
	3,2	2,1	1,3	3,2	1,3	3,1	1,2	3,1												

Γραμμοσκίαση: Οι ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές (γ) Παίγνια τύπου ΙΙΙ. (*και οι δύο παίκτες έχουν κυρίαρχη στρατηγική και το κάθε παίγνιο έχει μία αμιγή ΝΕ).*

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Ζ	Η	Θ	Ι
Α	**1,1** 2,2 3,3 4,4	**1,1** 2,2 4,3 3,4	**1,1** 2,3 3,2 4,4	**1,1** 2,3 4,2 3,4	**1,1** 2,4 3,2 4,3	**1,1** 2,4 4,2 3,3	**1,1** 3,2 2,3 4,4	**1,1** 3,3 2,2 4,4	**1,1** 3,4 2,2 4,3	1,2 **2,1** 3,4 4,3
Β	1,2 **2,1** 4,4 3,3	**1,2** 2,3 3,1 4,4	**1,2** 2,3 4,1 3,4	**1,2** 2,4 3,1 4,3	**1,2** 2,4 4,1 3,3	1,2 **3,1** 2,4 4,3	**1,2** 3,3 2,1 4,4	**1,2** 3,4 2,1 4,3	1,3 **2,1** 3,4 4,2	1,3 **2,1** 4,4 3,2
Γ	1,3 **2,2** 3,4 4,1	1,3 **2,2** 4,4 3,1	**1,3** 2,4 3,1 4,2	**1,3** 2,4 4,1 3,2	1,3 **3,1** 2,4 4,2	1,3 **3,2** 2,4 4,1	**1,3** 3,4 2,1 4,2	1,4 **2,1** 3,3 4,2	1,4 **2,1** 4,3 3,2	1,4 **2,2** 3,3 4,1
Δ	1,4 **2,2** 4,3 3,1	1,4 **2,3** 3,2 4,1	1,4 **2,3** 4,2 3,1	1,4 **3,1** 2,3 4,2	1,4 **3,2** 2,3 4,1	1,4 **3,3** 2,2 4,1	**2,1** 1,2 3,3 4,4	**2,1** 1,2 4,3 3,4	**2,1** 1,3 3,2 4,4	**2,1** 1,3 4,2 3,4
Ε	**2,1** 1,4 3,2 4,3	**2,1** 1,4 4,2 3,3	2,1 4,2 **1,3** 3,4	2,1 4,3 **1,2** 3,4	2,1 4,4 **1,2** 3,3	2,2 **1,1** 3,4 4,3	2,2 **1,1** 4,4 3,3	**2,2** 1,3 3,1 4,4	**2,2** 1,3 4,1 3,4	**2,2** 1,4 3,1 4,3
ΣΤ	**2,2** 1,4 4,1 3,3	2,2 4,1 1,4 **3,3**	2,2 4,3 **1,1** 3,4	2,2 4,4 **1,1** 3,3	2,3 **1,1** 3,4 4,2	2,3 **1,1** 4,4 3,2	2,3 **1,2** 3,4 4,1	2,3 **1,2** 4,4 3,1	**2,3** 1,4 3,1 4,2	**2,3** 1,4 4,1 3,2
Ζ	2,3 4,1 1,4 **3,2**	2,3 4,2 1,4 **3,1**	2,3 4,4 **1,1** 3,2	2,4 **1,1** 3,3 4,2	2,4 **1,1** 4,3 3,2	2,4 **1,2** 3,3 4,1	2,4 **1,2** 4,3 3,1	2,4 **1,3** 3,2 4,1	2,4 **1,3** 4,2 3,1	2,4 4,1 1,3 **3,2**
Η	2,4 4,2 1,3 **3,1**	2,4 4,3 1,2 **3,1**	**3,1** 1,2 4,3 2,4	**3,1** 1,3 4,2 2,4	**3,1** 1,4 4,2 2,3	3,1 4,2 **1,3** 2,4	3,1 4,2 **2,3** 1,4	3,1 4,3 **1,2** 2,4	3,1 4,3 **2,2** 1,4	3,1 4,4 **1,2** 2,3
Θ	3,1 4,4 **2,2** 1,3	3,2 **1,1** 4,4 2,3	**3,2** 1,3 4,1 2,4	**3,2** 1,4 4,1 2,3	3,2 4,1 1,4 **2,3**	3,2 4,1 2,4 **1,3**	3,2 4,3 **1,1** 2,4	3,2 4,3 **2,1** 1,4	3,2 4,4 **1,1** 2,3	3,2 4,4 **2,1** 1,3
Ι	3,3 **1,1** 4,4 2,2	3,3 **1,2** 4,4 2,1	**3,3** 1,4 4,1 2,2	3,3 4,1 1,4 **2,2**	3,3 4,1 2,4 **1,2**	3,3 4,2 1,4 **2,1**	3,3 4,2 2,4 **1,1**	3,3 4,4 **1,1** 2,2	3,3 4,4 **2,1** 1,2	3,4 **1,1** 4,3 2,2
Κ	3,4 **1,2** 4,3 2,1	3,4 **1,3** 4,2 2,1	3,4 4,1 1,3 **2,2**	3,4 4,1 2,3 **1,2**	3,4 4,2 1,3 **2,1**	3,4 4,2 2,3 **1,1**	3,4 4,3 1,2 **2,1**	3,4 4,3 2,2 **1,1**	4,1 2,2 **3,3** 1,4	4,1 2,3 **3,2** 1,4
Λ	4,1 2,4 **3,2** 1,3	4,1 3,2 **1,3** 2,4	4,1 3,2 **2,3** 1,4	4,1 3,3 **1,2** 2,4	4,1 3,3 **2,2** 1,4	4,1 3,4 **1,2** 2,3	4,1 3,4 **2,2** 1,3	4,2 2,1 3,4 **1,3**	4,2 2,3 **3,1** 1,4	4,2 2,4 **3,1** 1,3
Μ	4,2 3,1 1,4 **2,3**	4,2 3,1 2,4 **1,3**	4,2 3,3 **1,1** 2,4	4,2 3,3 **2,1** 1,4	4,2 3,4 **1,1** 2,3	4,2 3,4 **2,1** 1,3	4,3 2,1 3,4 **1,2**	4,3 2,2 3,4 **1,1**	4,3 2,4 **3,1** 1,2	4,3 3,1 1,4 **2,2**
Ν	4,3 3,1 2,4 **1,2**	4,3 3,2 1,4 **2,1**	4,3 3,2 2,4 **1,1**	4,3 3,4 **1,1** 2,2	4,3 3,4 **2,1** 1,2	4,4 2,1 3,3 **1,2**	4,4 2,2 3,3 **1,1**	4,4 2,3 3,2 **1,1**	4,4 3,1 1,3 **2,2**	4,4 3,1 2,3 **1,2**
Ξ	4,4 3,2 1,3 **2,1**	4,4 3,2 2,3 **1,1**	4,4 3,3 1,2 **2,1**	4,4 3,3 2,2 **1,1**						

Γραμμοσκίαση: Οι ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές.

Σημείωση: Τέσσερα παίγνια τύπου prisoners dilemma: Δ-ΣΤ , ΣΤ-Β , Ι-Γ και Κ-Θ.

(δ) Παίγνια **τύπου IV.** (*κανείς παίκτης δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική. 72 παίγνια έχουν δύο ΝΕ και 72 δεν έχουν ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές*)

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Ζ	Η	Θ	Ι
Α	1,1 3,2 4,4 2,3	1,1 3,3 4,4 2,2	1,1 3,4 4,3 2,2	1,1 4,2 2,4 3,3	1,1 4,2 3,4 2,3	1,1 4,3 2,4 3,2	1,1 4,3 3,4 2,2	1,1 4,4 2,3 3,2	1,1 4,4 3,3 2,2	1,2 3,1 4,3 2,4
Β	1,2 3,3 4,4 2,1	1,2 3,4 4,3 2,1	1,2 4,1 2,3 3,4	1,2 4,1 3,3 2,4	1,2 4,3 2,4 3,1	1,2 4,3 3,4 2,1	1,2 4,4 2,3 3,1	1,2 4,4 3,3 2,1	1,3 3,1 4,2 2,4	1,3 3,2 4,1 2,4
Γ	1,3 3,4 4,2 2,1	1,3 4,1 2,2 3,4	1,3 4,1 3,2 2,4	1,3 4,2 2,1 3,4	1,3 4,2 3,1 2,4	1,3 4,4 2,2 3,1	1,3 4,4 3,2 2,1	1,4 3,1 4,2 2,3	1,4 3,2 4,1 2,3	1,4 3,3 4,1 2,2
Δ	1,4 4,1 2,2 3,3	1,4 4,1 3,2 2,3	1,4 4,2 2,1 3,3	1,4 4,2 3,1 2,3	1,4 4,3 2,1 3,2	1,4 4,3 3,1 2,2	2,1 3,2 1,4 4,3	2,1 3,2 4,4 1,3	2,1 3,3 1,4 4,2	2,1 3,3 4,4 1,2
Ε	2,1 3,4 1,3 4,2	2,1 3,4 4,3 1,2	2,1 4,2 3,4 1,3	2,1 4,3 3,4 1,2	2,1 4,4 3,3 1,2	2,2 3,1 1,3 4,4	2,2 3,1 4,3 1,4	2,2 3,3 1,4 4,1	2,2 3,3 4,4 1,1	2,2 3,4 1,3 4,1
ΣΤ	2,2 3,4 4,3 1,1	2,2 4,1 3,3 1,4	2,2 4,3 3,4 1,1	2,2 4,4 3,3 1,1	2,3 3,1 1,2 4,4	2,3 3,1 4,2 1,4	2,3 3,2 1,1 4,4	2,3 3,2 4,1 1,4	2,3 3,4 1,2 4,1	2,3 3,4 4,2 1,1
Ζ	2,3 4,1 3,2 1,4	2,3 4,2 3,1 1,4	2,3 4,4 3,2 1,1	2,4 3,1 1,2 4,3	2,4 3,1 4,2 1,3	2,4 3,2 1,1 4,3	2,4 3,2 4,1 1,3	2,4 3,3 1,1 4,2	2,4 3,3 4,1 1,2	2,4 4,1 3,2 1,3
Η	2,4 4,2 3,1 1,3	2,4 4,3 3,1 1,2	3,1 1,2 2,4 4,3	3,1 1,3 2,4 4,2	3,1 1,4 2,3 4,2	3,1 2,2 1,4 4,3	3,1 2,2 4,4 1,3	3,1 2,3 1,4 4,2	3,1 2,3 4,4 1,2	3,1 2,4 1,3 4,2
Θ	3,1 2,4 4,3 1,2	3,2 1,1 2,3 4,4	3,2 1,3 2,4 4,1	3,2 1,4 2,3 4,1	3,2 2,1 1,3 4,4	3,2 2,1 4,3 1,4	3,2 2,3 1,4 4,1	3,2 2,3 4,4 1,1	3,2 2,4 1,3 4,1	3,2 2,4 4,3 1,1
Ι	3,3 1,1 2,2 4,4	3,3 1,2 2,1 4,4	3,3 1,4 2,2 4,1	3,3 2,1 1,2 4,4	3,3 2,1 4,2 1,4	3,3 2,2 1,1 4,4	3,3 2,2 4,1 1,4	3,3 2,4 1,2 4,1	3,3 2,4 4,2 1,1	3,4 1,1 2,2 4,3
Κ	3,4 1,2 2,1 4,3	3,4 1,3 2,1 4,2	3,4 2,1 1,2 4,3	3,4 2,1 4,2 1,3	3,4 2,2 1,1 4,3	3,4 2,2 4,1 1,3	3,4 2,3 1,1 4,2	3,4 2,3 4,1 1,2	4,1 1,2 2,4 3,3	4,1 1,2 3,4 2,3
Λ	4,1 1,3 2,4 3,2	4,1 1,3 3,4 2,2	4,1 1,4 2,3 3,2	4,1 1,4 3,3 2,2	4,1 2,2 1,4 3,3	4,1 2,3 1,4 3,2	4,1 2,4 1,3 3,2	4,2 1,1 2,3 3,4	4,2 1,1 3,3 2,4	4,2 1,3 2,4 3,1
Μ	4,2 1,3 3,4 2,1	4,2 1,4 2,3 3,1	4,2 1,4 3,3 2,1	4,2 2,1 1,3 3,4	4,2 2,3 1,4 3,1	4,2 2,4 1,3 3,1	4,3 1,1 2,2 3,4	4,3 1,1 3,2 2,4	4,3 1,2 2,1 3,4	4,3 1,2 3,1 2,4
Ν	4,3 1,4 2,2 3,1	4,3 1,4 3,2 2,1	4,3 2,1 1,2 3,4	4,3 2,2 1,1 3,4	4,3 2,4 1,2 3,1	4,4 1,1 2,2 3,3	4,4 1,1 3,2 2,3	4,4 1,2 2,1 3,3	4,4 1,2 3,1 2,3	4,4 1,3 2,1 3,2
Ξ	4,4 1,3 3,1 2,2	4,4 2,1 1,2 3,3	4,4 2,2 1,1 3,3	4,4 2,3 1,1 3,2						

Γραμμοσκίαση: Οι ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές

Παίγνια με μία καλή και μια κακή ισορροπία και για τους δύο παίκτες: π.χ. Α-Δ, Α-ΣΤ, Α-Η, Α-Θ, ΣΤ-Α, ΣΤ-Γ, Ζ-Η, Μ-Ζ, Ξ-Γ κ.ά.

Παίγνια στα οποία η μια ισορροπία ευνοεί τον ένα παίκτη και η άλλη ισορροπία ευνοεί τον άλλον παίκτη: π.χ. Β-Β, Β-ΣΤ, Ε-Β, Ε-ΣΤ, Ι-Β, Κ-Γ κ.ο.κ.

Τα παίγνια χωρίς ισορροπία είναι αυτά που στην ανάλυση χαρακτηρίζονται ως Τύπου IV.β